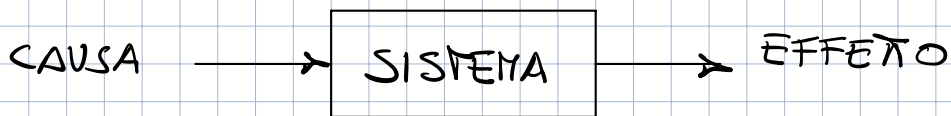


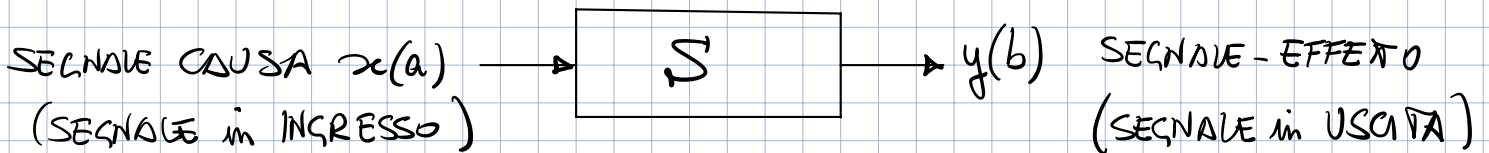
SISTEMI

SISTEMA: FENOMENO caratterizzato da una
RELAZIONE di CAUSA $\rightarrow$ EFFETTO



SISTEMA per l'ELABORAZIONE di SEGNALI:

$\hookrightarrow$ **CAUSA ed EFFETTO sono SEGNALI**



Definizione FORMALE: **$S[\cdot]$ RELAZIONE INGRESSO-USCITA**

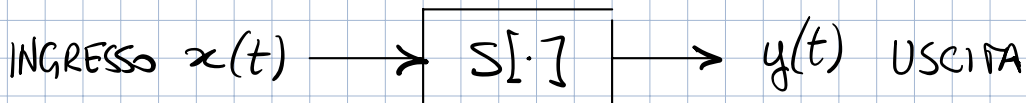
SISTEMA: $S[\cdot]$ tale che: $y(b) = S[x(a)]$, $a \in A$, $b \in B$

Se $x(a)$ e $y(b)$ sono SEGNALI CONTINUI (A, B sono INSIEMI CONTINUI)

Allora $S[\cdot]$: $y(b) = S[x(a)]$ è un SISTEMA CONTINUO

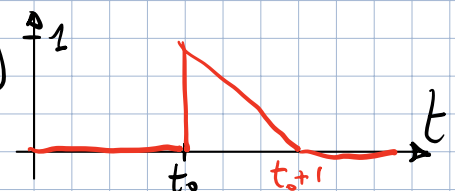
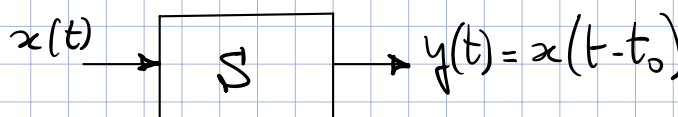
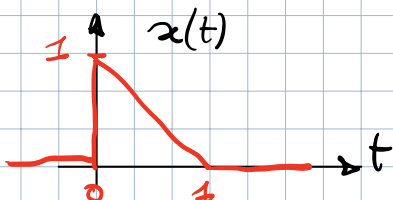
$\hookrightarrow$ se $a, b = t$ (TEMPO), $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ SISTEMA TEMPO-CONTINUO

SISTEMI TEMPO-CONTINUI



SISTEMA: $y(t) = S[x(t)]$, $t \in \mathbb{R}$

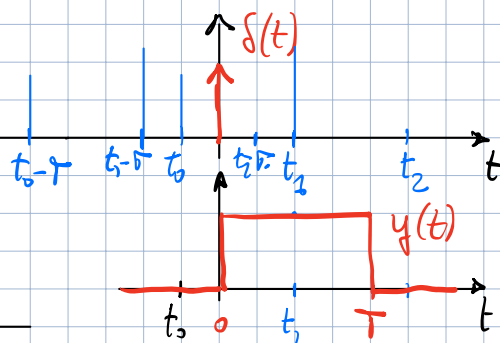
ESEMPIO: RITARDATEORE: $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0)$



Es: INTEGRATORE DEFINITO: $y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$

es: $x(t) = \delta(t)$

$$y(t) = \int_{t-T}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$



PROPRIETÀ dei SISTEMI TEMPO-CONTINUI

NON DISPERSIVITÀ

Un sistema $S[\cdot]$ è detto NON DISPERSIVO SSE:

l'USCITA all'ISTANTE t DIPENDE SOLO dall'INGRESSO all'ISTANTE t
 $\rightarrow$ l'USCITA dipende solo dall'INGRESSO PRESENTE

Formalmente:

$S[\cdot]$ è NON DISPERSIVO SSE $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(t))$

Esempi: AMPLIFICATORE IDEALE: $S[\cdot]: y(t) = A x(t) \rightarrow$ NON DISPERSIVO

$S[\cdot]: y(t) = 5 x^2(t) \text{rect}(3t)$

CAUSALITÀ

$S[\cdot]$ è CAUSALE SSE l'USCITA DIPENDE dal PRESENTE e dal PASSATO
 dell'INGRESSO $\rightarrow$ NON DIPENDE dal FUTURO

Formalmente:

$S[\cdot]$ è CAUSALE SSE $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \leq t)$

Esempio: $S[\cdot]: y(t) = 2 x^2\left(\frac{t}{2} - 1\right)$ è CAUSALE?

$\tau = \frac{t}{2} - 1 \leq t$ $\xrightarrow{\tau \leq t?}$ $-1 \leq \frac{t}{2} \rightarrow t \geq -2$

$\rightarrow$ per $t \geq -2$ CAUSALE
 $\rightarrow$ per $t < -2$ NON CAUSALE

NON CAUSALE

STABILITÀ "BOUNDED INPUT, BOUNDED OUTPUT" (BIBO)

$\rightarrow$ a un INGRESSO LIMITATO corrisponde SEMPRE un'USCITA LIMITATA

Formalmente:

def: $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)]$, $S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) SSE:

$\forall x(t)$ t.c. $|x(t)| \leq K_x$ FINITO $\rightarrow |y(t)| \leq K_y$ FINITO, $\forall t \in \mathbb{R}$

Es: AMPLIFICATORE ideale: $y(t) = A x(t)$

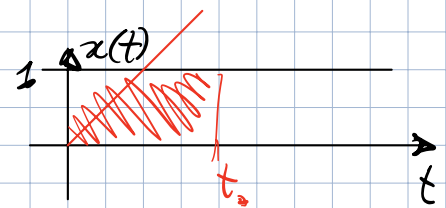
IP: $|x(t)| \leq K_x \rightarrow |y(t)| = |A x(t)| = |A| \cdot |x(t)| \leq |A| \cdot K_x = K_y$ è FINITO

Es: INTEGRATORE INDEFINITO: $y(t) = S[x(t)] = \int_0^t x(\tau) d\tau$

CONTROESEMPIO: $x(t) = 1 \leftarrow$ LIMITATA

$$\downarrow y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t \rightarrow \infty \text{ per } t \rightarrow \infty$$

NON STABILE (BIBO)



LINEARITÀ

Un SISTEMA $S[\cdot]$ è LINEARE SSE $S[\cdot]$ è OMOGENEO e ADDITIVO

OMOGENEITÀ: $S[\cdot]$ è OMOGENEO SSE:

def: $y(t) = S[x(t)] \rightarrow S[a x(t)] = a S[x(t)] = a y(t)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

ADDITIVITÀ: $S[\cdot]$ è ADDITIVO SSE:

def: $\begin{cases} y_1(t) = S[x_1(t)] \\ y_2(t) = S[x_2(t)] \end{cases} \rightarrow S[x_1(t) + x_2(t)] = S[x_1(t)] + S[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$

Per i SISTEMI LINEARI vale il:

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI:

L'EFFETTO (RISPOSTA) di un SISTEMA LINEARE a una COMBINAZIONE LINEARE di INGRESSI è UGUALE alla STESSA COMBINAZIONE LINEARE (stessi PESI) delle RISPOSTE del SISTEMA ad OGNI SINGOLO INGRESSO

Def: N INGRESSI $x_i(t)$, $i=1, \dots, N \rightarrow$ USCITE $y_i(t) = S[x_i(t)]$

def: $x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \rightarrow y(t) = S[x(t)] = \sum_{i=1}^N a_i S[x_i(t)] = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t)$

Es: $S[\cdot]: y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$ è LINEARE?

$$x_i(t), i=1..N; x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \rightarrow y(t) = S[x(t)] = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau = \int_{t-1}^t \sum_{i=1}^N a_i x_i(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^N a_i \int_{t-1}^t x_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t) \rightarrow \text{è LINEARE!}$$

$y_i(t) = S[x_i(t)] = \int_{t-1}^t x_i(\tau) d\tau$

$x_i(t) \rightarrow y_i(t) = S[x_i(t)] = \int_{t-1}^t x_i(\tau) d\tau$

E: $S[\cdot]: y(t) = S[x(t)] = 2x(t-1) + 1$

è OMOGENEO? $S[ax(t)] = ay(t) = a S[x(t)]$

$$S[ax(t)] = 2ax(t-1) + 1$$

$$a S[x(t)] = a(2x(t-1) + 1) = 2ax(t-1) + a \neq$$

NON OMOGENEO
↓
NON LINEARE

Es: $y(t) = |x(t)|$ è LINEARE? (COMPARO)

TEMPO - INVARIANZA

$S[\cdot]$ è TEMPO-INVARIANTE SSE la RELAZIONE INGRESSO-USCITA "NON VARIA" nel TEMPO

Formalmente:

Dato $S[\cdot]: y(t) = S[x(t)] \rightarrow y(t-t_0) = S[x(t-t_0)], \forall t, t_0 \in \mathbb{R}$

Esempio: RITARDATEORE: $S[\cdot]: y(t) = x(t-D)$

- USCITA TRASLATA di t_0 : $y(t-t_0) = x(t-t_0-D)$

- USCITA di INGRESSO TRASLATO di t_0 : $S[x(t-t_0)] = x(t-t_0-D)$

→ TEMPO-INVARIANTE

Es: "FINESTRATORE": $y(t) = x(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

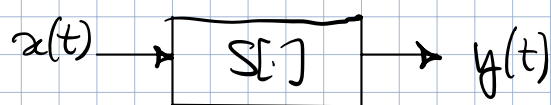
- $y(t-t_0) = x(t-t_0) \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$

- $S[x(t-t_0)] = x(t-t_0) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

≠ TEMPO-VARIANTE

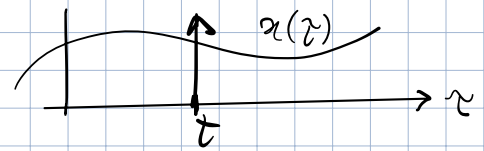
SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI (LTI)

$$y(t) = S[x(t)]$$



Sfruttando le PROP. del CAMPIONAMENTO di $\delta(t)$: posso scrivere $x(t)$ così :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$



Quindi : $y(t) = S[x(t)] = S\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)}_{\text{COEFFICIENTI}} \underbrace{\delta(t-\tau)}_{\text{FUNZIONI di } t} d\tau\right]$ (DISTRIBUTORI)

Se $S[.]$ è LINEARE :

$$y(t) = S\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{S[\delta(t-\tau)]}_{\text{la RIS. all'IMPULSO in } \tau} d\tau$$

dato $y(t) = S[x(t)]$ DEFINIAMO : $h(t) = S[\delta(t)]$ la RISPOSTA all'IMPULSO di $S[.]$

Se $S[.]$ è TEMPO-INVARIANTE :

$$\text{se } h(t) = S[\delta(t)] \longrightarrow h(t-t_0) = S[\delta(t-t_0)]$$

Allora : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ In un sistema LTI, se conosco $h(t)$, so TUTTO di $S[.]$!

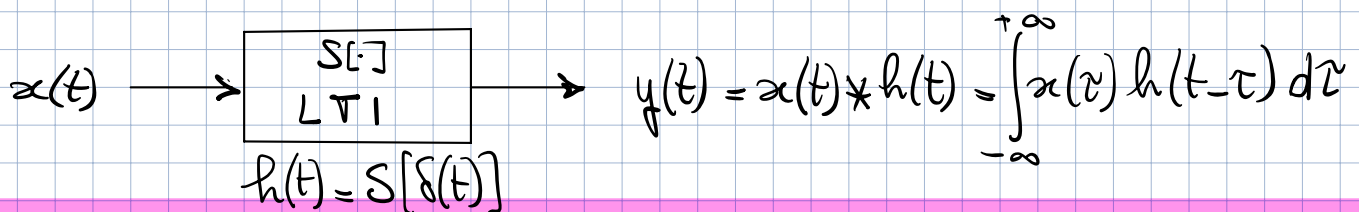
Queste relazioni tra $x(t)$ e $y(t)$ è detta :

CONVOLUZIONE (o PRODOTTO di CONVOLUZIONE)

Date $f(t)$ e $g(t) \longrightarrow C(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$

quindi, per $x(t)$ e $y(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$

Per SISTEMI LTI : se conosco $h(t) = S[\delta(t)]$ allora so TUTTO di $S[.]$:



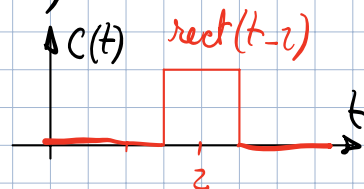
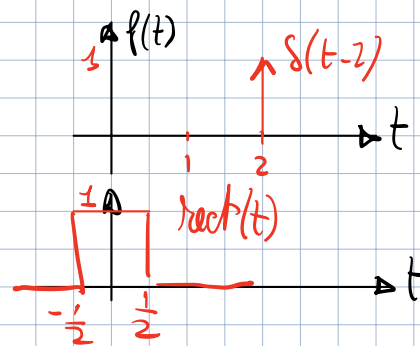
ESEMPIO di CALCOLO delle CONVOLUZIONE

● CONVOLUZIONE di $f(t)$ con IMPULSI IDEALI

Dati: $f(t) = \delta(t-2)$; $g(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$f(t) * g(t) = \delta(t-2) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-2) \text{rect}(t-\tau) d\tau =$$

$$\stackrel{\left\{ \begin{array}{l} \tau' = \tau - 2 \\ \tau = \tau' + 2 \\ d\tau = d\tau' \end{array} \right.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau') \text{rect}(t - \tau' - 2) d\tau' = \text{rect}(t-2)$$



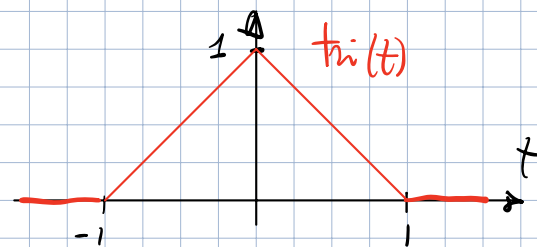
In GENERALE: $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

● Esempio di calcolo: $C(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$ $\left[\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \right]$

$$C(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\tau) \cdot \text{rect}(t-\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \text{rect}(t-\tau) d\tau$$

$$C(t) = \begin{cases} t \leq -1 \rightarrow C(t) = 0 \\ t \geq +1 \rightarrow C(t) = 0 \\ -1 \leq t \leq 0 \rightarrow C(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} d\tau = \left[\tau \right]_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = t + 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \rightarrow C(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} d\tau = \left[\tau \right]_{t-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} = 1 - t \end{cases}$$

$$\rightarrow C(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{tri}(t)$$



$\text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t)$

PROCEDURA "VISUALE" di CALCOLO delle CONVOLUZIONE

Dati $f(t)$ e $g(t)$, quanto vale:

$$C(t) \Big|_{t=t_0} = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t_0 - \tau) d\tau \quad \text{per } t=t_0?$$

1) CONSIDERO : $f(t)$ e $g(t_0 - t) \rightarrow g(t)$ "RIBIERTA" e TRASLATA di t_0

2) CALCOLO IL PRODOTTO $p(t) = f(t) \cdot g(t_0 - t)$

3) $C(t=t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) d\tau \rightarrow$ AREA di $p(t)$

Esempio : calcoliamo la CONVOLUZIONE di : $f(t) = \cos(2\pi t)$ e $g(t) = \text{rect}(t)$:

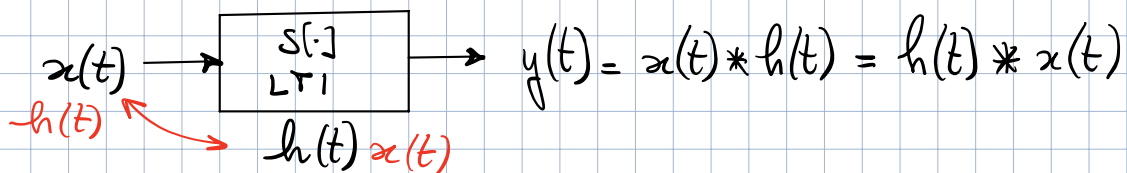
$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \cos(2\pi t) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi \tau) \text{rect}(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \cos(2\pi \tau) \cdot 1 \cdot d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\sin 2\pi \tau \right]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sin(2\pi(t+\frac{1}{2})) - \sin(2\pi(t-\frac{1}{2})) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sin(2\pi t + \pi) - \sin(2\pi t - \pi) \right] = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow = 1$ per $-\frac{1}{2} \leq t-\tau \leq \frac{1}{2}$
 $-t-\frac{1}{2} \leq -\tau \leq -t+\frac{1}{2}$
 $t-\frac{1}{2} \leq \tau \leq t+\frac{1}{2}$

PROPRIETÀ delle CONVOLUZIONI

PROPRIETÀ COMMUTATIVA : $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

DIM : $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \left[\text{SOST. : } \tau = t-x \rightarrow x = t-\tau, dx = -d\tau \right] =$
 $= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x) g(x) (-dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(t-x) dx = g(t) * f(t) \quad \text{C.V.}$



PROPRIETÀ ASSOCIATIVA :

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * g(t) * h(t)$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA (della SOMMA) :

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

DURATA delle CONVOLUZIONE:

Date: $f(t)$ di DURATA T_f
 $g(t)$ di DURATA $T_g \rightarrow C(t) = f(t) * g(t)$ ha DURATA $T_f + T_g$

PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI

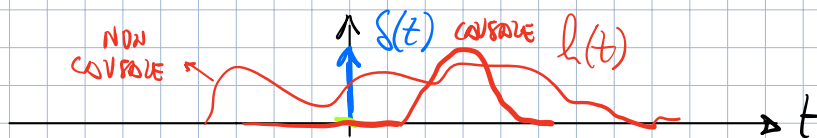
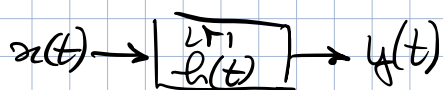
Dato un SISTEMA $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)]$: se $S[\cdot]$ è LTI, allora:

dette $h(t) = S[\delta(t)]$ RISPOSTA di $S[\cdot]$ all'IMPULSO,

abbiamo che $y(t) = S[x(t)] = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

CAUSALITÀ di $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \leq t)$

Per sistemi LTI: ho $h(t)$; POSSO DEDURRE la CAUSALITÀ da $h(t)$?



Un SISTEMA $S[\cdot]$ LTI è CAUSALE SSE $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$

In quest caso: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

STABILITÀ (BIBO)

Dato $S[\cdot]$, $S[\cdot]$ è STABILE SSE:

dato $x(t)$ t.c. $|x(t)| \leq M_x$ FINITO $\rightarrow |y(t)| \leq M_y$ FINITO, $\forall t$

Dato un SISTEMA $S[\cdot]$ LTI, consideriamo: $|y(t)|$:

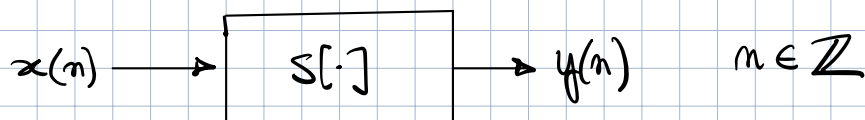
$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq M_x} d\tau \leq M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \leq M_y \text{ FINITO}$$

→ $S[\cdot]$ LTI è STABILE (BIBO) SSE $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$ è FINITO
(sse $h(t)$ è INTEGRABILE in VAL. ASSOLUTA)

SISTEMI DISCRETI

DEF: SISTEMA DISCRETO : SISTEMA in cui INGRESSO e USCITA sono SEGNALE DISCRETI



$S[\cdot]: y(n) = S[x(n)], n \in \mathbb{Z}$ e n è il TEMPO → $S[\cdot]$ è SISTEMA TEMPO-DISCRETO

Esempi:

- RITARDATEORE DISCRETO $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)] = x(n-5)$
- INTEGRATORE DISCRETO: $y(n) = S[x(n)] = \sum_{i=0}^N x(n-i), n, N \in \mathbb{Z}$
es: $N=4 \rightarrow y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$

PROPRIETÀ dei SISTEMI DISCRETI

CAUSALITÀ: $S[\cdot]$ è CAUSALE SSE:

Dato $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)] = f(n, x(m), m \leq n); m, n \in \mathbb{Z}$

STABILITÀ (BOUNDED INPUT, BOUNDED OUTPUT)

Dato $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)], S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) SSE:

$$|x(n)| \leq K_x \text{ FINITO} \rightarrow |y(n)| \leq K_y \text{ FINITO}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

LINEARITÀ (OMOGENEITÀ + ADDITIVITÀ)

OMOGENEITÀ:

Dato $y(n) = S[x(n)]$ è OMOGENEO SSE $S[ax(n)] = a S[x(n)] = a y(n); \begin{cases} \forall a \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ADDITIVITÀ:

Dati: $y_1(n) = S[x_1(n)]$, $y_2(n) = S[x_2(n)]$, $S[\cdot]$ è ADDITIVO sse: $S[x_1(n) + x_2(n)] = S[x_1(n)] + S[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$

LINEARITÀ ≡ PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZ. degli EFFETTI:

Dati: N segnali $x_i(n)$, $i=1, \dots, N \rightarrow y_i(n) = S[x_i(n)]$

dato: $x(n) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(n)$

allora: $y(n) = S[x(n)] = S[\sum_{i=1}^N a_i x_i(n)] = \sum_{i=1}^N a_i S[x_i(n)] = \sum_{i=1}^N a_i y_i(n)$

Esempio di verifica linearità:

Dato $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)] = x^2(n-2)$; è LINEARE?

Verifica OMOGENEITÀ:

$$S[ax(n)] = [ax(n-2)]^2 = a^2 x^2(n-2) \neq a S[x(n)] = a x^2(n-2) \rightarrow \text{NON OMOGENEO} \rightarrow \text{NON LINEARE}$$

TEMPO-INVARIANZA

Dato $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)]$, $S[\cdot]$ è TEMPO-INVARIANTE sse

$$\rightarrow y(n-n_0) = S[x(n-n_0)], \forall n, n_0 \in \mathbb{Z}$$

Esempio: $y(n) = S[x(n)] = x(n) \cdot u(n)$; è T. INVARIANTE?

$$\rightarrow y(n-n_0) = x(n-n_0) u(n-n_0) \neq S[x(n-n_0)] = x(n-n_0) u(n) \rightarrow \text{NON è T. INV.}$$

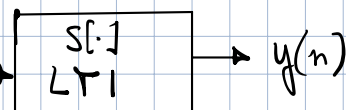
SISTEMI LINEARI e TEMPO-INVARIANTI DISCRETI

Considero un SISTEMA DISCRETO $S[\cdot]$ LINEARE e TEMPO-INVARIANTE

Posso esprimere $x(n)$ come:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \delta(n-i)$$

prop. CAMPIONAMENTO di $x(n)$
di $\delta(n)$



INVERSA in n $\rightarrow x(n) = \text{COMB. LINEARE (coeff. } x(i)) \text{ di FUNZIONI } \delta(n-i)$

$$L'USCITA : y(n) = S[x(n)] = S\left[\sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(i)}_{\text{coeff.}} \delta(n-i)\right]$$

ESSENDO $S[\cdot]$ LINEARE :

$$\hookrightarrow y(n) = S\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x(i) \delta(n-i)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i) S[\delta(n-i)]$$

DEFINIAMO : $h(n) = S[\delta(n)]$ RISPOSTA di $S[\cdot]$ all'IMPULSO DISCRETO

ESSENDO $S[\cdot]$ TEMPO-INVARIANTE :

$$\text{se } h(n) = S[\delta(n)] \longrightarrow h(n-n_0) = S[\delta(n-n_0)], \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Quindi : } y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i) h(n-i) ; h(n) = S[\delta(n)]$$

Se DEFINIAMO la CONVOLUZIONE DISCRETA :

$$c(n) = f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(i) g(n-i)$$

Abbiamo che :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S[\cdot] \text{ LTI} \\ h(n) = S[\delta(n)] \end{matrix}} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i) h(n-i)$$

PROCEDURA OPERATIVA di CALCOLO della CONVOLUZIONE DISCRETA :

$$c(n) = f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(i) g(n-i)$$

1) considero : $f(i)$, $g(n-i) \rightarrow$ "RIBOLTA" sull'ASSE delle ASCISSE, TRASLATA di n

2) Calcolo la funzione PRODOTTO : $p(i) = f(i) g(n-i)$

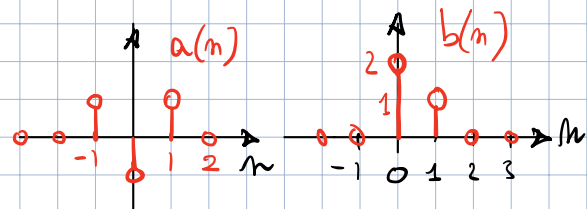
3) $c(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} p(i)$: AREA / SOMMA dei VALORI $p(i)$

Esempio: calcolo $c(n) = a(n) * b(n)$, dove : $a_n = \{1, -1, 1\}$ e $b_n = \{2, 1\}$

Esprimo l'espressione di $a(n) * b(n)$:

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i) b(n-i) =$$

$$= a(-1)b(n+1) + a(0)b(n) + a(1)b(n-1) = b(n+1) - b(n) + b(n-1)$$



$$n \leq -2 \rightarrow c(n) = 0$$

$$n = -1 \rightarrow c(-1) = b(0) - \cancel{b(-1)} + \cancel{b(-2)} = 2$$

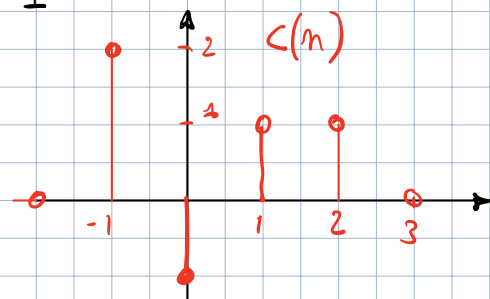
$$n = 0 \rightarrow c(0) = b(1) - b(0) + \cancel{b(-1)} = 1 - 2 = -1$$

$$m = 1 \rightarrow c(1) = \cancel{b(2)} - b(1) + b(0) = -1 + 2 = +1$$

$$n = 2 \rightarrow c(2) = \cancel{b(3)} - \cancel{b(2)} + b(1) = 1$$

$$n \geq 3 \rightarrow c(n) = 0$$

$$C_m = \{2, -1, +1, +1\}$$



Dato $s(n) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, calcolare $s(n) * u(n)$

$$u(m) = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

$$c(n) = s(n) * u(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(i) u(n-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^n i \cdot s(i) \cdot 1 = \sum_{i=0}^n i \cdot s(i) \quad [\text{me } s(i)=0 \text{ per } i < 1] =$$

$$u(n-i) = \begin{cases} 1 & m-i \geq 0 \\ 0 & m-i < 0 \end{cases}$$

$m \geq i \rightarrow i \leq m$

$$= \sum_{i=1}^n i \cdot s(i), \text{ per } n \geq 1$$

$$n < 1 \rightarrow c(n) = 0$$

$$n = 1 \rightarrow c(1) = \sum_{i=1}^1 s(i) = s(1) = 1$$

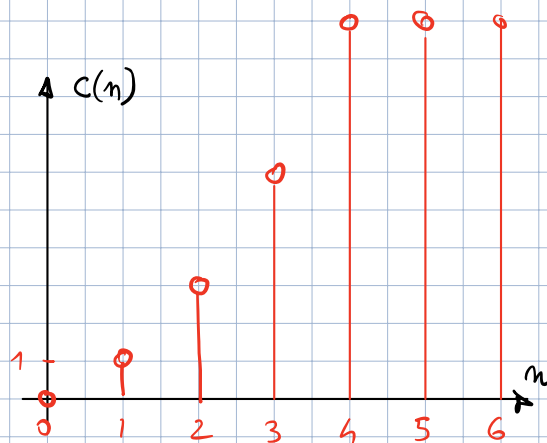
$$n = 2 \rightarrow c(2) = \sum_{i=1}^2 s(i) = 1 + 2 = 3$$

$$n = 3 \rightarrow c(3) = s(1) + s(2) + s(3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$n=4 \rightarrow c(4) = 1+2+3+4 = 10$$

$$n > 4 \rightarrow c(n) = \sum_{i=1}^n s(i) = 10$$

$$c(n) = \{0, 1, 3, 6, 10, 10, \dots\}$$



COMPTON: calculate $\text{rect}(\frac{n}{3}) * \text{rect}(\frac{n}{5})$

$$\{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\} \quad \{1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$$

PROPRIETÀ delle CONVOLUZIONI DISCRETE

1) COMMUTATIVA : $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$

DIM: $f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(i) g(n-i) = \left\{ \begin{matrix} m = n-i \\ i = n-m \end{matrix} \right\} =$
 $= \sum_{-\infty}^{\infty} f(n-m) g(m) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(m) f(n-m) = g(n) * f(n) \quad \checkmark$

$x(n) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{LTI} \\ h(n) \end{matrix}} \rightarrow y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \xrightarrow{h(n)} \boxed{\begin{matrix} \text{LTI} \\ x(n) \end{matrix}} \rightarrow y(n)$

• ASSOCIATIVA :

$$f(n) * [g(n) * h(n)] = [f(n) * g(n)] * h(n) = f(n) * g(n) * h(n)$$

• DISTRIBUTIVA della SOMMA :

$$f(n) * [g(n) + h(n)] = f(n) * g(n) + f(n) * h(n)$$

• DURATA delle CONVOLUZIONI DISCRETE :

se $\begin{cases} f(n) \text{ ha DURATA } D_f \in \mathbb{Z} \\ g(n) \text{ ha DURATA } D_g \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow f(n) * g(n) \text{ ha DURATA : } D_f + D_g - 1$

• CONVOLUZIONE con $\delta(n-n_0)$:

$$f(n) * \delta(n) = f(n) \longrightarrow f(n) * \delta(n-n_0) = f(n-n_0)$$

DIM: $f(n) * \delta(n-n_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(i) \underbrace{\delta(n-n_0-i)}_{=1 \text{ per } i = n-n_0} = f(n-n_0) \quad \checkmark$

PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI DISCRETI

$x(n) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} S[\cdot] \text{ LTI} \\ h(n) = S[\delta(n)] \end{matrix}} \rightarrow y(n) = x(n) * h(n)$

CAUSALITÀ :

$\delta(n) \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow h(n)$

$S[\cdot]$ LTI è CAUSALE se $h(n) = 0$ per $\forall n < 0$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i) h(n-i) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(i) x(n-i)$$

$\downarrow$
 $= 0 \text{ per } n-i < 0 \rightarrow i > n$

STABILITÀ (BIBO) :

$S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) SSE, dato $|x(n)| \leq M_x$ FINITO $\rightarrow |y(n)| \leq M_y$ FINITO

$$|y(n)| = |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{-\infty}^{\infty} x(i) h(n-i) \right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x(i) h(n-i)| =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(i)|}_{\leq M_x} \cdot |h(n-i)| \leq M_x \underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} |h(n-i)|}_{\text{è FINITA}} \leq M_y \text{ FINITO}$$

$\rightarrow S[\cdot]$ LTI è STABILE (BIBO) SSE $\sum_{-\infty}^{\infty} |h(i)|$ è FINITO

ESEMPI di RIEPILOGO

* Dato il sistema $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)] = x(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$

ovvero $S[\cdot]$ è : a) NON DISPERSIVO b) CAUSALE c) LINEARE e d) TEMPO-INVARIANTE

a) NON DISPERSIVO SSE : $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(t)) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$ ✓ NON DISPERSIVO

b) CAUSALE SSE : $y(t) = f(t, x(\tau), \tau \leq t) = x(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$ $\tau = t \leq t \forall t$ ✓ CAUSALE

c) LINEARE ?

- OMOGENEO ? : $a S[x(t)] = S[ax(t)] \rightarrow a S[x(t)] = a y(t) = a(x(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right))$
 $S[ax(t)] = ax(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) \rightarrow$ OMOGENEO

- ADDITIVO ? $S[x_1(t) + x_2(t)] = (x_1(t) + x_2(t)) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) = x_1(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) + x_2(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) =$
 $= S[x_1(t)] + S[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$ ADDITIVO LINEARE

d) TEMPO-INVARIANTE ? $y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]$, $\forall t_0$

$y(t) = x(t) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) : \rightarrow y(t-t_0) = x(t-t_0) \text{rect}\left(\frac{t-t_0-4}{2}\right)$
 $S[x(t-t_0)] = x(t-t_0) \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) \neq y(t-t_0)$ NON è TEMPO-INV.

* Dato $S[\cdot] : y(t) = S[x(t)] = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau-1) d\tau$, è CAUSALE / LINEARE / T.INV. ?

a) CAUSALE: $y(t) = f(t, x(\tau), \tau \leq t) = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\alpha-1) d\alpha$

$\tau = \alpha - 1$, dove $-2t \leq \alpha \leq +2t \rightarrow -2t-1 \leq \alpha-1 = \tau \leq 2t-1$

considero i valori ESTREMI di τ :

• $\tau = 2t-1 \leq t \rightarrow t \leq 1$ NON CAUSALE

• $\tau = -2t-1 \leq t \rightarrow t \geq -\frac{1}{3}$

b) LINEARITÀ: test OMOGENEITÀ: $Ay(t) = S[Ax(t)]$

$Ay(t) = A \left[1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\alpha-1) d\alpha \right] = A + A \int_{-2t}^{+2t} x(\alpha-1) d\alpha$

$S[Ax(t)] = 1 + \int_{-2t}^{+2t} Ax(\alpha-1) d\alpha = 1 + A \int_{-2t}^{+2t} x(\alpha-1) d\alpha$

NON LINEARE

c) TEMPO-INVARIANZA: $y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]$, $\forall t_0$

$y(t) = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau-1) d\tau \rightarrow y(t-t_0) = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau-t_0-1) d\tau$

$\xrightarrow{\substack{\tau' = \tau - t_0 \\ d\tau' = d\tau}} = 1 + \int_{-2t-t_0}^{+2t-t_0} x(\tau'-1) d\tau'$

$S[x(t-t_0)] = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau-t_0-1) d\tau \rightarrow$ TEMPO-INVARIANTE

Es 2 Tema gen 2h

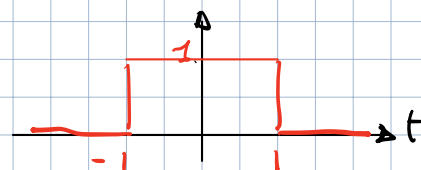
Dato: $S[\cdot]$ LTI: $y(t) = S[x(t)] = \int_t^{t+2} x(\tau-1) d\tau$, calcolare la RISPOSTA all'IMPULSO $h(t)$

$h(t) = S[S(t)] = \int_t^{t+2} S(\tau-1) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{se } (\tau-1) \text{ "passa" per } \delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$t \leq \tau \leq t+2 \rightarrow t-1 \leq \tau-1 \leq t+1$

$\begin{cases} t-1 \leq 0 \rightarrow t \leq 1 \\ t+1 \geq 0 \rightarrow t \geq -1 \end{cases} \rightarrow -1 \leq t \leq 1$

$\rightarrow h(t) = \int_t^{t+2} \delta(\tau-1) d\tau = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$

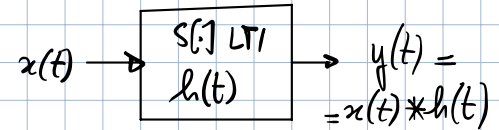


In alternativa:

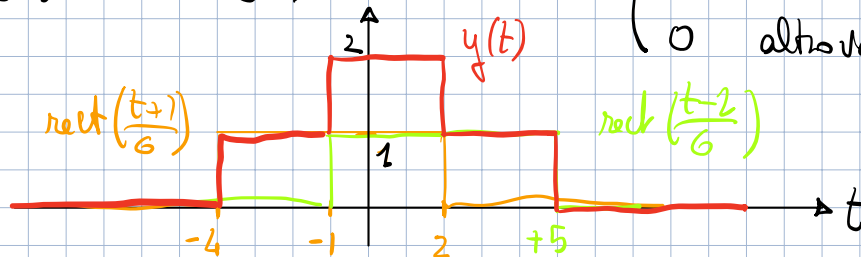
$$h(t) = \int_t^{t+2} \delta(\tau-1) d\tau = \left[\begin{matrix} \tau' = \tau-1 \\ d\tau' = d\tau \end{matrix} \right] = \int_{t-1}^{t+1} \delta(\tau) d\tau \rightarrow \underbrace{t-1 \leq \tau \leq t+1}_{\substack{t-1 \leq 0 \\ t \leq 1}} \overset{0}{\leq} \tau \leq \underbrace{t+1}_{\substack{t+1 \geq 0 \\ t \geq -1}}$$

★ Dato $S[\cdot]$ LTI con risposte all'impulso $h(t) = \delta(t+1) + \delta(t-2)$

calcolare $y(t)$ per ingresso: $x(t) = \text{rect}(t/6)$.

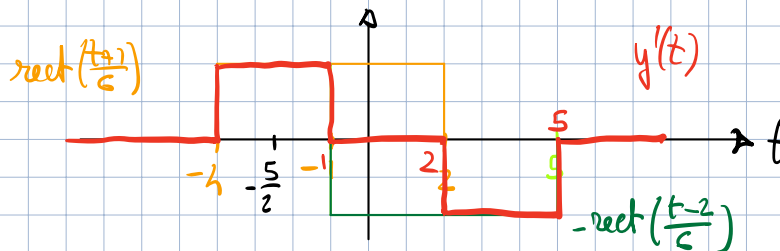


$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = x(t) * [\delta(t+1) + \delta(t-2)] = \\ &= x(t) * \delta(t+1) + x(t) * \delta(t-2) = x(t+1) + x(t-2) = \\ &= \text{rect}\left(\frac{t+1}{6}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-2}{6}\right) = \begin{cases} 2 & -1 \leq t \leq 2 \\ 1 & -4 \leq t < -1 \vee 2 < t \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$



se $h'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-2)$:

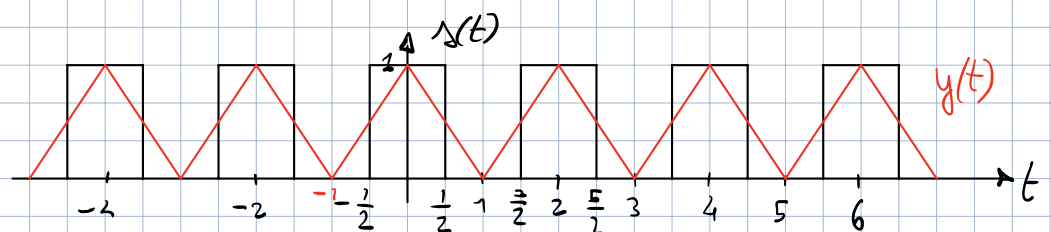
$$y'(t) = \text{rect}\left(\frac{t+1}{6}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-2}{6}\right) = \text{rect}\left(\frac{t+5/2}{3}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-7/2}{3}\right) = \begin{cases} 1 & -4 \leq t \leq -1 \\ -1 & 2 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



★ Dato $S[\cdot]$ LTI con $h(t) = \text{rect}(t)$

dato l'ingresso $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t-2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, determinare l'uscita

grafico di $s(t)$:



$$\text{L'uscita: } y(t) = s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t-2k) \right] * \text{rect}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t-2k) * \text{rect}(t) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} k \underbrace{\text{rect}(t) * \delta(t - 2k)}_{= \text{rect}(t - 2k)} * \text{rect}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} k \delta(t - 2k) * \text{tri}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} k \text{tri}(t - 2k) \quad y(t)$$