SISTEMA: FENOMENO caratterizzato da una RELAZIONE di CAUSA → EFFETTO

CAUSA ⟶ [SISTEMA] ⟶ EFFETTO

SISTEMI per l'ELABORAZIONE dei SEGNALI:
↳ CAUSA ed EFFETTO sono SEGNALI

$x(a)$ ⟶ [S] ⟶ $y(b)$

SEGNALE CAUSA (INGRESSO) — SEGNALE EFFETTO (USCITA)

Definizione FORMALE: $S[\cdot]$ RELAZIONE INGRESSO-USCITA

$$\boxed{\text{SISTEMA}: \ S[\cdot] \text{ tale che}: \ y(b) = S[x(a)] \ , \ a \in A \ , \ b \in B}$$

Se $x(a)$ e $y(b)$ sono SEGNALI CONTINUI (A, B sono INSIEMI CONTINUI)

Allora $S[\cdot]: \ y(b) = S[x(a)]$ è un SISTEMA CONTINUO

↳ se $a, b \equiv t$ (TEMPO), $t \in \mathbb{R}$ → SISTEMI TEMPO-CONTINUI

SISTEMI TEMPO-CONTINUI

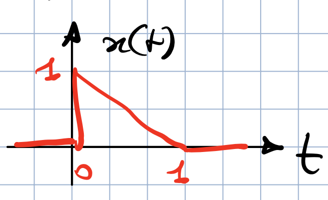
$x(t)$ ⟶ [$S[\cdot]$] ⟶ $y(t)$ USCITA

INGRESSO

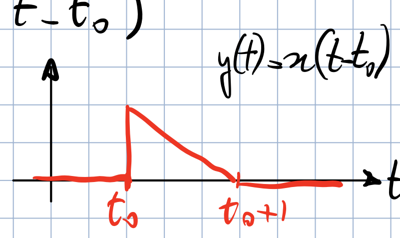
SISTEMA: $y(t) = S[x(t)]$, $t \in \mathbb{R}$

ESEMPI:

- RITARDATORE: $S[\cdot]: \ y(t) = S[x(t)] = x(t - t_0)$



$x(t)$ ⟶ [S] ⟶ $y(t) = x(t - t_0)$



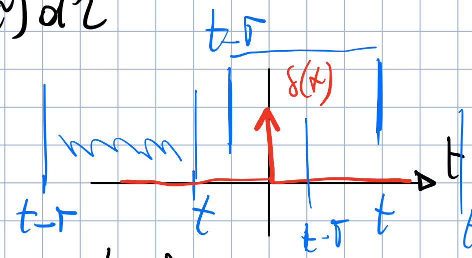
- INTEGRATORE DEFINITO: $y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$

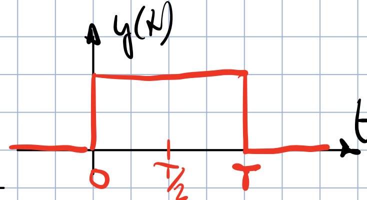
Es: $x(t) = \delta(t)$

$y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 1 & \text{se } t>0 \text{ e } t-T<0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$t-T<0 \rightarrow t<T \rightarrow 0<t<T$

$= \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$





PROPRIETÀ dei SISTEMI TEMPO-CONTINUI

NON DISPERSIVITÀ:

un sistema $S[\cdot]$ è detto NON DISPERSIVO sse l'USCITA all'ISTANTE t DIPENDE dall'INGRESSO SOLAMENTE nell'ISTANTE t

↳ DIPENDE dall'INGRESSO PRESENTE

Formalmente:

$S[\cdot]$ è NON DISPERSIVO sse $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(t))$

ESEMPI:
- AMPLIFICATORE IDEALE: $S[\cdot]$: $y(t) = A\,x(t)$
- $S[\cdot]$: $y(t) = 5\,x^2(t)\,\mathrm{rect}(t/2) \rightarrow = f(t, x(t))$?

→ NON DISPERSIVO!

CAUSALITÀ

$S[\cdot]$ è CAUSALE sse l'USCITA DIPENDE dal PRESENTE e dal PASSATO dell'INGRESSO (NON dipende dal FUTURO)

Formalmente:

$S[\cdot]$ è CAUSALE sse $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \le t)$

Esempio: $S[\cdot]$: $y(t) = 2\,x^2\left(\frac{t}{2}-1\right)$: è CAUSALE?

$\tau \le t$?

$\tau = \boxed{\frac{t}{2} - 1 \le t} \rightarrow -1 \le \frac{t}{2} \rightarrow t \ge -2$

- per $t \ge -2$ CAUSALE
- per $t < -2$ NON CAUSALE

STABILITÀ "BOUNDED-INPUT, BOUNDED-OUTPUT" (BIBO)

↳ ad un INGRESSO LIMITATO corrisponde SEMPRE un' USCITA LIMITATA

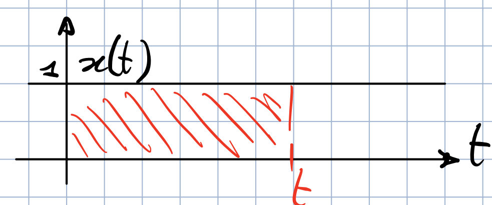
Formalmente: dato $S[\cdot]: y(t) = S[x(t)]$, $S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) sse:

$$\forall x(t) \text{ t.c. } |x(t)| \leq k_x \text{ FINITO} \longrightarrow |y(t)| \leq k_y \text{ FINITO}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Es: AMPLIF. IDEALE: $y(t) = A\,x(t)$

Ip: $|x(t)| \leq k_x \longrightarrow |y(t)| = |A\,x(t)| = |A| \cdot \underbrace{|x(t)|}_{\leq k_x} \leq |A| \cdot k_x = k_y$ è FINITO, $\forall |x(t)|$ → STABILE

Es: INTEGRATORE INDEFINITO: $y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$



CONTROESEMPIO: $x(t) = 1$ ← LIMITATO

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau = \int_0^t d\tau = t$$

→ per $t \to \infty$ $y(t) \to \infty$

→ NON STABILE (BIBO)

LINEARITÀ

Un SISTEMA $S[\cdot]$ è LINEARE sse È OMOGENEO e ADDITIVO

OMOGENEITÀ: $S[\cdot]$ è OMOGENEO sse:

dato: $y(t) = S[x(t)] \longrightarrow S[a\,x(t)] = a\,S[x(t)] = a\,y(t), \ \forall a \in \mathbb{R}$

ADDITIVITÀ: $S[\cdot]$ è ADDITIVO sse:

dati: $\begin{cases} y_1(t) = S[x_1(t)] \\ y_2(t) = S[x_2(t)] \end{cases} \longrightarrow S[x_1(t) + x_2(t)] = S[x_1(t)] + S[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$

Per i SISTEMI LINEARI vale il:

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

L'EFFETTO (o RISPOSTA) di un SISTEMA LINEARE a una COMBINAZIONE LINEARE (SOMMA PESATA) di INGRESSI è UGUALE alla STESSA

COMB. LINEARE (stessi PESI) delle RISPOSTE del SISTEMA ad OGNI SINGOLO INGRESSO

Dati: N ingressi $x_i(t), i=1..N \longrightarrow$ USCITE: $y_i(t) = S[x_i(t)]$

Dato $x(t) = \sum_1^N a_i x_i(t) \rightarrow y(t) = S[x(t)] = \sum_1^N a_i S[x_i(t)] = \sum_1^N a_i y_i$

Es: $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$ è LINEARE?

$x(t) = \sum_1^N a_i x_i(t) \longrightarrow y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{t-T}^{t} \sum_1^N a_i x_i(\tau)\, d\tau =$

$= \sum_1^N a_i \underbrace{\int_{t-T}^{t} x_i(\tau)\, d\tau}_{y_i(t) = S[x_i(t)]} = \sum_1^N a_i y_i(t) \longrightarrow$ LINEARE!

Es: $y(t) = S[x(t)] = 2x(t-1) + 1$

è OMOGENEO? : $S[a x(t)] = a\, y(t) = a\, S[x(t)]$

$S[a x(t)] = 2a x(t-1) + 1$

$a S[x(t)] = a[2x(t-1) + 1] = 2a x(t-1) + a$

$\neq$ NON OMOGENEO $\Downarrow$ NON LINEARE

Es: $y(t) = |x(t)|$ è LINEARE? (COMPITO)

TEMPO - INVARIANZA

$S[\cdot]$ è TEMPO-INVARIANTE sse la RELAZIONE INGRESSO-USCITA "NON VARIA" nel TEMPO

Formalmente:

Dato $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] \longrightarrow y(t-t_0) = S[x(t-t_0)], \; \forall t_0, t \in \mathbb{R}$

Es: RITARDATORE; $S[\cdot]$: $y(t) = x(t-D)$

- USCITA RITARDATA: $y(t-t_0) = x(t-t_0-D) \rightarrow (=) \rightarrow$ TEMPO-INVARIANTE

- USCITA di INGRESSO RITARDATO: $S[x(t-t_0)] = x(t-t_0-D)$

Es: "FINESTRATORE": $y(t) = x(t) \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$\rightarrow y(t-t_0) = x(t-t_0) rect\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$

$\rightarrow S[x(t-t_0)] = x(t-t_0) rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$\neq$ TEMPO-VARIANTE

SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI (LTI)

$$y(t) = S[x(t)] \qquad x(t) \longrightarrow \boxed{S[\cdot]} \longrightarrow y(t)$$

Sfruttando le pr. del CAMPIONAMENTO di $\delta(t)$ posso scrivere $x(t)$ come:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = S[x(t)] = S\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{COEFFICIENTI (PESI)}}\,\underbrace{\delta(t-\tau)}_{\text{FUNZIONI}}\,d\tau\Big] =$$

Se $S[\cdot]$ è LINEARE:

$$y(t) = S\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\underbrace{S[\delta(t-\tau)]}_{\text{RISPOSTA all'IMPULSO in } \tau}\,d\tau$$

dato $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)]$, DEFINIAMO: $h(t) = S[\delta(t)]$ la RISPOSTA all'IMPULSO di $S[\cdot]$

Se $S[\cdot]$ è TEMPO-INVARIANTE:

$$\text{se } h(t) = S[\delta(t)] \longrightarrow h(t-t_0) = S[\delta(t-t_0)]$$

Allora:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau} = x(t) * h(t)\,!$$

In un sistema LTI, se conosco $h(t)$, so TUTTO di $S[\cdot]$

CONVOLUZIONE (PRODOTTO di CONVOLUZIONE)

Date $f(t),\ g(t) \longrightarrow c(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$

Quindi: $x(t),\ h(t) \longrightarrow x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = y(t)$

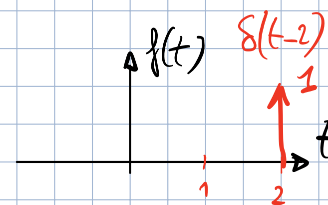
Per SISTEMI LTI: se CONOSCO $h(t) = S[\delta(t)] \longrightarrow$ SO TUTTO di $S[\cdot]$

$x(t) \longrightarrow$ [$S[\cdot]$ LTI] $\longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

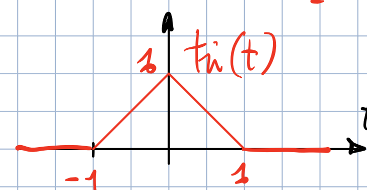
$h(t) = S[\delta(t)]$

ESEMPI di CALCOLO della CONVOLUZIONE:

CONVOLUZIONE con IMPULSI IDEALI

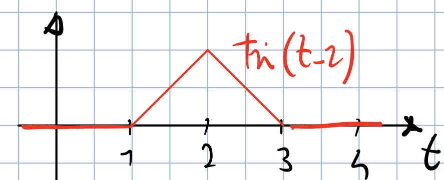


Dati $f(t) = \delta(t-2)$; $g(t) = \text{tri}(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$c(t) = f(t) * g(t) = \delta(t-2) * \text{tri}(t) =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-2) \cdot \text{tri}(t-\tau)\, d\tau = \left[\begin{matrix} \tau' = \tau - 2 \\ \tau = \tau' + 2 \\ d\tau = d\tau' \end{matrix}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau')\, \text{tri}(t-\tau'-2)\, d\tau' = \text{tri}(t-2)$

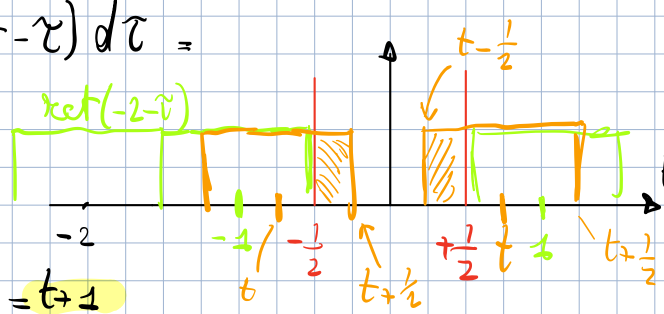


In GENERALE: $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

Esempio: calcoliamo: $c(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$

$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

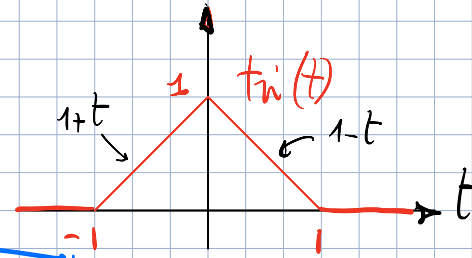
$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\tau) \cdot \text{rect}(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot \text{rect}(t-\tau)\, d\tau =$



$c(t) = \begin{cases} t < -1 \longrightarrow c(t) = 0 \\ t > +1 \longrightarrow c(t) = 0 \\ -1 \le t \le 0 \longrightarrow c(t) = \int^{t+\frac{1}{2}} d\tau = t + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = t+1 \end{cases}$

$0 \le t \le 1 \longrightarrow c(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cancel{1}\cdot d\tau = \frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) = 1 - t$

$$c(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = tri(t)$$



$$\boxed{rect(t) * rect(t) = tri(t)}$$

Calcoliamo la CONVOLUZIONE di $f(t) = \cos(2\pi t)$ con $g(t) = rect(t)$

$$c(t) = \cos(2\pi t) * rect(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\tau)\cdot \underbrace{rect(t-\tau)}\, d\tau =$$

$= 1$ per $-\frac{1}{2} \le t-\tau \le \frac{1}{2}$

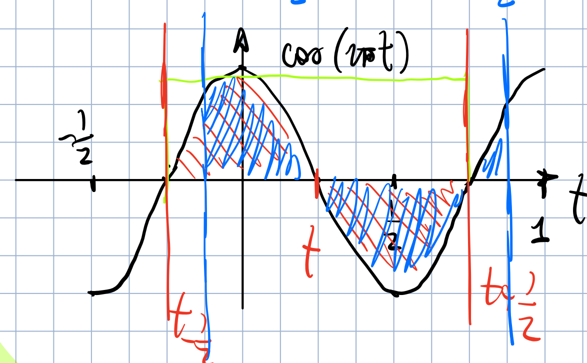
$-t-\frac{1}{2} \le -\tau \le -t+\frac{1}{2}$

$t-\frac{1}{2} \le \tau \le t+\frac{1}{2}$

$$= \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \cos(2\pi\tau)\cdot \cancel{1}\cdot d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\sin 2\pi\tau\right]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sin\left(\cancel{2\pi t+\pi}\right) - \sin\left(\cancel{2\pi t-\pi}\right)\right] = 0$$



"PROCEDURA OPERATIVA" di CALCOLO della CONVOLUZIONE

Date $f(t)$ e $g(t)$, quanto vale:

$$c(t)\Big|_{t=t_0} = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot g(t_0-\tau)\, d\tau \quad \text{per } t = t_0 \,?$$

1) CONSIDERO $f(t)$ e $g(t_0 - t)$ → $g(t)$ "RIBALTATA" e TRASLATA di t_0

2) Calcolo il PRODOTTO $f(t)\cdot g(t_0 - t) = p(t)$

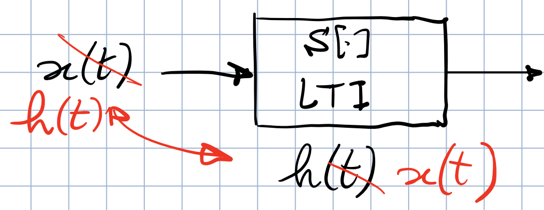
3) $c(t=t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\, d\tau$

PROPRIETÀ della CONVOLUZIONE

PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

DIM: $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \left[\begin{array}{l} \text{Sostituz.} \\ x = t-\tau \rightarrow \tau = t-x,\ d\tau = -dx \end{array} \right] =$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x)\, g(x)\, (-dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(t-x)\, dx = g(t) * f(t) \ \blacktriangle$$



$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * g(t) * h(t)$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA (della SOMMA):

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

DURATA della CONVOLUZIONE

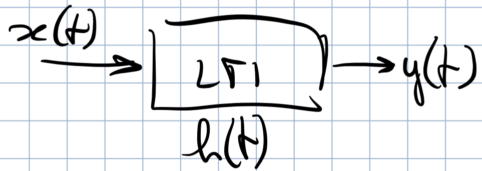
Dati: $f(t)$ di DURATA T_F $\longrightarrow$ $c(t) = f(t) * g(t)$ ha DURATA $T_F + T_G$
$g(t)$ di DURATA T_G

PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI

Dato un SISTEMA $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)]$, se $S[\cdot]$ è LTI
↳ allora, detta $h(t) = S[\delta(t)]$ RISPOSTA all'IMPULSO di $S[\cdot]$
abbiamo che: $y(t) = S[x(t)] = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

CAUSALITÀ di $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \leq t)$

Per sistemi LTI: ho $h(t)$ $\longrightarrow$ posso capire la causalità da $h(t)$?



$$\boxed{\text{Un SISTEMA LTI } S[\cdot] \text{ è CAUSALE sse } h(t) = 0 \quad \forall t < 0}$$

In questo caso: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\cancel{+\infty}\, t} x(\tau)\, \underbrace{h(t-\tau)}_{=0 \text{ per } t-\tau<0,\ \tau > t}\, d\tau = \int_{\cancel{-\infty}\, 0}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$

STABILITÀ (BIBO)

Dato $S[\cdot]$, $S[\cdot]$ è STABILE sse: dato $x(t)$ t.c. $|x(t)| \leq M_x$ FINITO

$\longrightarrow |y(t)| \leq M_y$ FINITO, $\forall t$

Dato un $S[\cdot]$ LTI, consideriamo $|y(t)|$:

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)\, x(t-\tau)|\, d\tau =$$

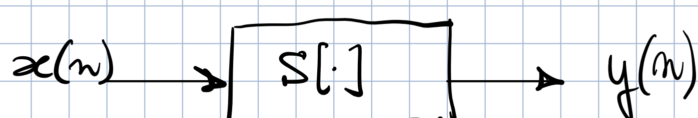
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq M_x}\, d\tau \leq M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau \leq M_y \text{ FINITO}$$

$S[\cdot]$ LTI è STABILE (BIBO) SSE $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau$ è FINITO

(se $h(t)$ è INTEGRABILE in VAL. ASSOLUTO)

SISTEMI DISCRETI

DEF: SISTEMA in cui INGRESSO e USCITA sono SEGNALI DISCRETI



$n \in \mathbb{Z}$

$S[\cdot]: \quad y(n) = S[x(n)], \quad n \in \mathbb{Z}$

se n: TEMPO, $S[\cdot]$ è un SISTEMA TEMPO-DISCRETO

ESEMPI:

★ RITARDATORE DISCRETO: $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)] = x(n-5)$

★ INTEGRATORE DISCRETO:

$$y(n) = S[x(n)] = \sum_{0}^{N} {}_i\, x(n-i), \quad n, N \in \mathbb{Z}$$

es: $N = 4 \longrightarrow y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$

PROPRIETÀ dei SISTEMI DISCRETI

CAUSALITÀ

Dato $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)] = f(n, x(m), m \leq n), \quad m, n \in \mathbb{Z}$

STABILITÀ (Bounded Input, Bounded Output)

Dato $S[\cdot]: y(n) = S[x(n)]$, $S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) sse:

$$|x(n)| \leq k_x \text{ FINITO} \longrightarrow |y(n)| \leq k_y \text{ FINITO}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

LINEARITÀ (OMOGENEITÀ, ADDITIVITÀ)

OMOGENEITÀ:

Dato: $y(n) = S[x(n)]$ è OMOGENEO sse $S[a x(n)] = a S[x(n)] = a \cdot y(n)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

ADDITIVITÀ:

Dati: $y_1(n) = S[x_1(n)]$, $y_2(n) = S[x_2(n)]$

$S[\cdot]$ è ADDITIVO sse $S[x_1(n) + x_2(n)] = S[x_1(n)] + S[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$.

LINEARITÀ ≡ PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZ. degli EFFETTI:

Dati N segnali $x_i(n)$, $i = 1, .., N \longrightarrow y_i(n) = S[x_i(n)]$

Dato: $x(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, x_i(n)$

Allora: $y(n) = S[x(n)] = S\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(n)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \, S[x_i(n)] = \sum_{i=1}^{N} a_i \, y_i(n)$

Esempio di verifica linearità:

Dato $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)] = 1 + x(n-2)$ è LINEARE?

Verifico l'OMOGENEITÀ:

$$S[a \cdot x(n)] = 1 + a\,x(n-2)$$
$$a\,S[x(n)] = a + a\,x(n-2)$$

$\neq$ → NON OMOGENEO → NON LINEARE

Esempio: $y(n) = S[x(n)] = \sum_{i=-2}^{+2} x(n-i)$ è lineare?

Verifico con P.S.E.: considero $x(n) = \sum_{j=1}^{N} a_j \, x_j(n)$

$$y(n) = S[x(n)] = \sum_{i=-2}^{+2} x(n-i) = \sum_{i=-2}^{+2} \sum_{j=1}^{N} a_j x_j(n-i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{i=-2}^{+2} a_j x_j(n-i) \right] = \sum_{j=1}^{N} a_j \underbrace{\sum_{i=-2}^{2} x_j(n-i)}_{y_j = S[x_j(n)]} = \sum_{j=1}^{N} a_j \, y_j(n)$$

COSTANTE

✓ → LINEARE

TEMPO-INVARIANZA

Dato $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)]$ è TEMPO-INVARIANTE SSE:

$$y(n) = S[x(n)] \longrightarrow y(n-n_0) = S[x(n-n_0)], \quad \forall n, n_0 \in \mathbb{Z}$$

Esempio: $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)] = x(n) \cdot u(n)$ è T. INVARIANTE?

→ $y(n-n_0) = x(n-n_0) \cdot \underline{u(n-n_0)}$

→ $S[x(n-n_0)] = x(n-n_0) \cdot \underline{u(n)}$

$\neq$ NON è T. INV.

SISTEMI LINEARI e TEMPO-INVARIANTI (LTI) DISCRETI

Considero un sistema discreto $S[\cdot]$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S[\cdot] \\ \text{LTI} \end{matrix}} \longrightarrow y(n)$$

Posso scrivere $x(n)$ come:

$$x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\; x(i)\,\underbrace{\delta(n-i)}_{\text{impulso in } n}$$

← PROPR. del CAMPIONAMENTO di $\delta(n)$

→ $x(n)$: COMB. LINEARE (coeff. $x(i)$) di FUNZIONI

L'USCITA: $y(n) = S[x(n)] = S\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i\; \underbrace{x(i)}_{\text{coeff.}}\, \underbrace{\delta(n-i)}_{\text{funzioni}}\right]$

ESSENDO $S[\cdot]$ LINEARE:

$$\rightarrow y(n) = S\left[\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\; x(i)\,\delta(n-i)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\; x(i)\, S[\delta(n-i)]$$

Definiamo: RISPOSTA ALL'IMPULSO DISCRETO di $S[\cdot]$: $h(n) := S[\delta(n)]$

ESSENDO $S[\cdot]$ TEMPO-INVARIANTE:

se $h(n) = S[\delta(n)] \longrightarrow h(n-n_0) = S[\delta(n-n_0)],\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}$

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i\; x(i)\, h(n-i) \quad ; \quad h(n) = S[\delta(n)]$$

Definiamo la: **CONVOLUZIONE DISCRETA**

$$c(n) = f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\; f(i) \cdot g(n-i)$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S[\cdot]\ \text{LTI} \\ h(n) = S[\delta(n)] \end{matrix}} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\; x(i)\, h(n-i)$$

CALCOLO della CONVOLUZIONE DISCRETA:

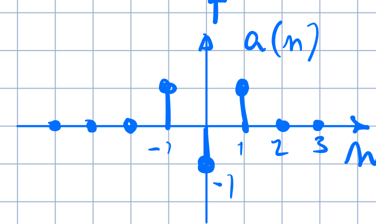
$$c(n) = f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\; f(i)\, g(n-i)$$

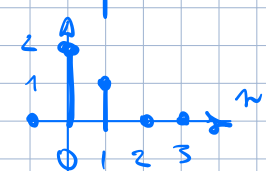
1) considero: $f(i)$; $g(n-i)$ ⟶ "RIBALTATA" sull'ASSE dei TEMPI, TRASLATA in n

2) Calcolo la FUNZIONE PRODOTTO: $p(i) = f(i) \cdot g(n-i)$

3) $c(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_i \, p(i)$ ("AREA"/SOMMA dei CAMPIONI di $p(i)$)

Esempio: calcolo $a(n) * b(n)$ dove $a_n = \{1, \underset{\uparrow}{-1}, 1\}$ e $b_n = \{\underset{\uparrow}{2}, 1\}$





L'espressione di $c(n)$:

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, a(i)\, b(n-i) = a(-1)\, b(n+1) + a(0)\, b(n) + a(1)\, b(n-1) =$$

$$= b(n+1) - b(n) + b(n-1)$$

$n \le -2 \longrightarrow c(n) = 0$

$n = -1 \longrightarrow c(-1) = b(0) - \cancel{b(-1)} + \cancel{b(-2)} = 2$

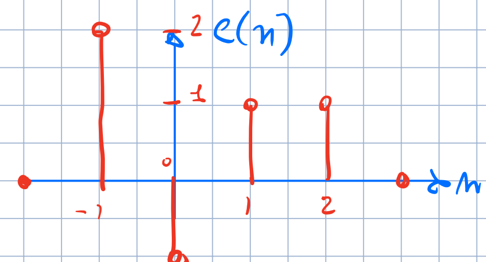
$n = 0 \longrightarrow c(0) = b(1) - b(0) + \cancel{b(-1)} = 1 - 2 = -1$

$n = 1 \longrightarrow c(1) = \cancel{b(2)} - b(1) + b(0) = -1 + 2 = +1$

$n = 2 \longrightarrow c(2) = \cancel{b(3)} - \cancel{b(2)} + b(1) = 1$

$n > 2 \longrightarrow c(n) = 0$

$\hookrightarrow \quad c(n) = \{2, \underset{\uparrow}{-1}, 1, 1\}$



Dato $s(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$, calcolare $s(n) * u(n)$

$$c(n) = s(n) * u(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, s(i)\, u(n-i) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{n} {}_i \, s(i) \cdot 1 = \sum_{-\infty}^{n} {}_i \, s(i)$$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$u(n-i) = \begin{cases} 1 & n-i \ge 0 \\ 0 & n-i < 0 \rightarrow i > n \end{cases}$$

$n \ge i \rightarrow i \le n$

Per $n \le 0 \longrightarrow c(n) = 0$

$n = 1 \longrightarrow c(n) = \sum_{-\infty}^{1} {}_i \, s(i) = s(1) = 1$

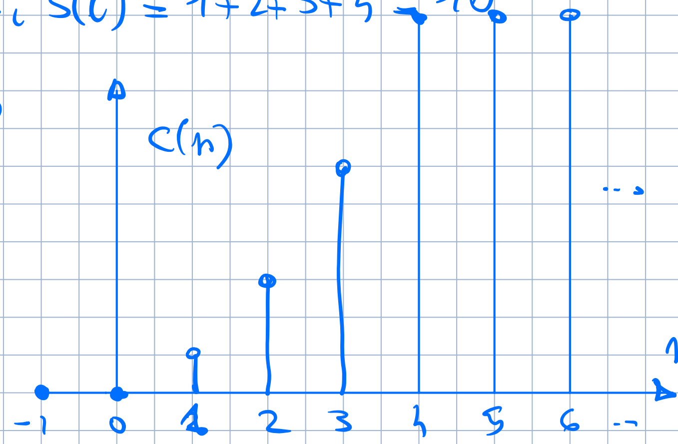
$n=2 \longrightarrow c(n) = s(1)+s(2) = 1+2 = 3$

$n=3 \longrightarrow c(n) = s(1)+s(2)+s(3) = 1+2+3 = 6$

$n=4 \longrightarrow c(n) = \sum_{-\infty}^{n} i\, s(i) = \sum_{1}^{4} i\, s(i) = 1+2+3+4 = 10$

$n \geq 4 \longrightarrow c(n) = \sum_{1}^{n} i\, s(i) = 10$

$c(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 6, 10, 10, \dots\}$



COMPITO: calcolare $\mathrm{rect}\left(\frac{n}{3}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{n}{5}\right)$

$\mathrm{rect}\left(\frac{n}{3}\right) \rightarrow \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$ $\qquad$ $\mathrm{rect}\left(\frac{n}{5}\right) \rightarrow \{1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$

PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI DISCRETI

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} S[\cdot]\ \text{LTI} \\ h(n) = S[\delta(n)] \end{array}} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

CAUSALITÀ

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{S[\cdot]\ \text{LTI}} \longrightarrow h(n)$$

$S[\cdot]$ LTI è **CAUSALE** sse $h(n) = 0$ per $\forall n < 0$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{-\infty}^{\cancel{+\infty}\ n} x(i)\, h(n-i) = \sum_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty} h(i)\, x(n-i)$$

$h(n-i) = 0$ per $n-i<0 \rightarrow i>n$

STABILITÀ (BIBO)

$S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) sse dato $|x(n)| \leq M_x$ FINITO $\longrightarrow |y(n)| \leq M_y$ FINITO

$$|y(n)| = |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{-\infty}^{+\infty} x(i)\, h(n-i) \right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x(i)\, h(n-i)| =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \overbrace{|x(i)|}^{\leq M_x} |h(n-i)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} M_x |h(n-i)| = M_x \overbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} |h(n-i)|}^{\text{FINITO}} \leq M_y$$

→ $S[\cdot]$ LTI è STABILE sse $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(i)| = k$ FINITO

PROPRIETÀ della CONVOLUZIONE DISCRETA

1) COMMUTATIVA: $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$

<u>DIM</u>: $f(n) * g(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\, g(n-i) = \left\{ \begin{array}{l} m = n - i \\ \rightarrow i = n - m \end{array} \right\} =$

$= \sum_{m=+\infty}^{-\infty} f(n-m)\, g(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)\, f(n-m) = g(n) * f(n)$ ✓

$x(n) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} LTI \\ h(n) \end{array}} \rightarrow$ $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$ $h(n) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} LTI \\ x(n) \end{array}} \rightarrow y(n)$

2) ASSOCIATIVA:

$$f(n) * [g(n) * h(n)] = [f(n) * g(n)] * h(n) = f(n) * g(n) * h(n)$$

3) DISTRIBUTIVA della SOMMA:

$$f(n) * [g(n) + h(n)] = f(n) * g(n) + f(n) * h(n)$$

4) DURATA della CONVOLUZIONE DISCRETA:

Se: $\left\{ \begin{array}{l} f(n) \text{ ha DURATA } D_f \in \mathbb{Z} \\ g(n) \text{ ha DURATA } D_g \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \rightarrow f(n) * g(n)$ ha DURATA $D_f + D_g - 1$

5) CONVOLUZIONE con $\delta(n - n_0)$:

$$f(n) * \delta(n) = f(n) \longrightarrow f(n) * \delta(n - n_0) = f(n - n_0)$$

<u>DIM</u>: $f(n) * \delta(n - n_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\, \underbrace{\delta(n - n_0 - i)}_{= 1 \text{ per } i = n - n_0} = f(n - n_0)$ ✓

ESERCIZI di RIEPILOGO

Dato il sistema $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$

dire se $S[\cdot]$ è: a) NON DISPERSIVO b) CAUSALE c) LINEARE d) T. INVARIANTE

a) Non dispersivo se $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(t)) = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$ ✓ NON DISPERSIVO

b) $S[\cdot]$ è CAUSALE se $y(t) = f(t, x(\tau), \tau \leq t) = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$ ← CAUSALE

c) $S[\cdot]$ è LINEARE? $y(t) = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$

OMOGENEO? $a\,S[x(t)] = S[a\,x(t)] \longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a\,S[x(t)] &= a\,x(t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{t-4}{2}\right) \\ S[a\,x(t)] &= a\,x(t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{t-4}{2}\right) \end{aligned}\right\} = \text{OMOGENEO}$$

ADDITIVO? $y(t) = S[\underbrace{x_1(t) + x_2(t)}_{x(t)}] = [x_1(t) + x_2(t)]\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) = \underbrace{x_1(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)}_{S[x_1(t)]} + \underbrace{x_2(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)}_{S[x_2(t)]}$

$= S[x_1(t)] + S[x_2(t)] \longrightarrow$ ADDITIVO! $\longrightarrow$ LINEARE

d) è TEMPO-INVARIANTE? $y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]$, $\forall t_0$

$$y(t) = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) \longrightarrow y(t-t_0) = x(t-t_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0-4}{2}\right)$$

$$S[x(t-t_0)] = x(t-t_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

$\neq$ NON è T. INVARIANTE

Dato $S[\cdot]$ LTI con risp. all'impulso $h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-2)$

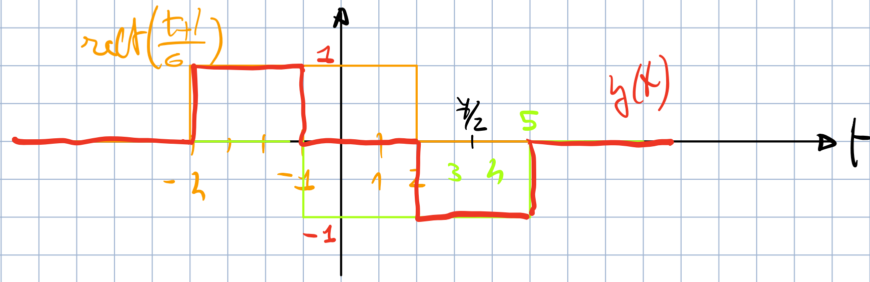
$x(t) \rightarrow \boxed{S[\cdot]\ \mathrm{LTI}\ h(t)} \rightarrow y(t)$

con segnale in ingresso $x(t) = \mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{6}\right)$ $= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$ calcolare $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-2)] = x(t) * \delta(t+1) - x(t) * \delta(t-2) =$$

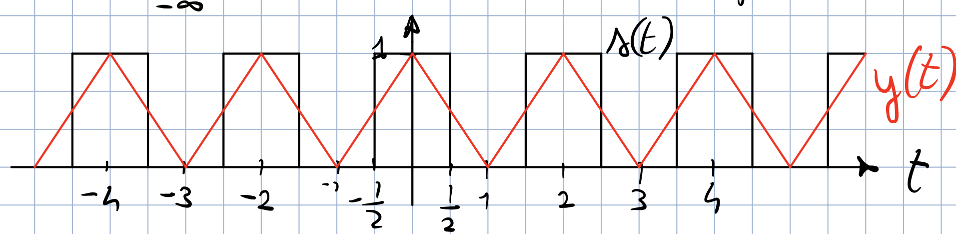
$$= x(t+1) - x(t-2) = \mathrm{rect}^{\cancel{2}}\left(\frac{t+1}{6}\right) - \mathrm{rect}^{\cancel{2}}\left(\frac{t-2}{6}\right) =$$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t+5/2}{3}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-7/2}{3}\right) = \begin{cases} 1 & -4 < t \leq -1 \\ -1 & 2 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Dato $S[\cdot]$ LTI con R. IMP. $h(t) = \mathrm{rect}(t)$

Dato il segnale: $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t-2k)$, $k \in \mathbb{Z}$ in ingresso, determinare l'uscita



L'uscita $y(t) = s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t-2k)\right] * \mathrm{rect}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t-2k) * \mathrm{rect}(t) =$

$\mathrm{rect}(t-2k) = \mathrm{rect}(t) * \delta(t-2k)$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) * \underbrace{\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)}_{\mathrm{tri}(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}(t) * \delta(t-2k) =$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}(t-2k) = y(t)$

Dato il sistema $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau-1)\, d\tau$

Verificare se è: a) CAUSALE b) LINEARE c) TEMPO-INVARIANTE

a) CAUSALE se $y(t) = f(t, x(\tau), \tau \le t) = 1 + \int_{-2t}^{2t} x(\alpha-1)\, d\alpha$

$x(\alpha-1)$ con $-2t \le \alpha \le 2t \rightarrow -2t-1 \le \alpha-1 \le 2t-1$

NON CAUSALE

$\tau = \alpha - 1 \longrightarrow -2t-1 \le \tau \le 2t-1 \rightarrow 2t-1 \le t \rightarrow t \le 1$

$\tau \ge -2t-1 \le t$, $3t \ge -1 \rightarrow t \ge -\frac{1}{3}$

b) LINEARE ? Test OMOGENEITÀ: $A y(t) = S[A x(t)]$

$$A\,y(t) = A\left[1 + \int_{-2t}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau\right] = A + A\int_{-2t}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau$$

$$S[Ax(t)] = 1 + \int_{-2t}^{2t} A x(\tau-1)\,d\tau = 1 + A\int_{-2t}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau$$

$\neq$ NON LINEARE

c) TEMPO-INVARIANTE ? $\quad y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]\ ,\ \forall t_0$

$$y(t) = 1 + \int_{-2t}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau \longrightarrow y(t-t_0) = 1 + \int_{-2t}^{2t} x(\tau-t_0-1)\,d\tau = 1 + \int_{-2t-t_0}^{2t-t_0} x(\tau-1)\,d\tau$$

$$S[x(t-t_0)] = 1 + \int_{-2t}^{2t} x(\tau-t_0-1)\,d\tau = 1 + \int_{-2t-t_0}^{2t-t_0} x(\tau-1)\,d\tau$$

$=$ TEMPO INVARIANTE