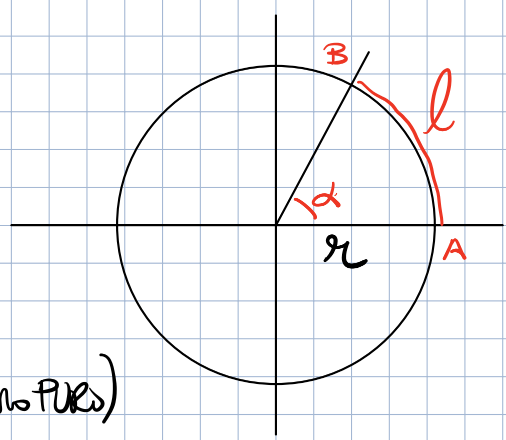
PROGRAMMA del CORSO

- PRELIMINARI: n. COMPLESSI, RADIANTI
- SEGNALI nel dominio dei TEMPI } segnali ANALOGICI
- SISTEMI " " " TEMPI }
- SEGNALI e SISTEMI nel dominio delle FREQUENZE
  - ↳ SV. SERIE di FOURIER
  - ↳ TRASF. di FOURIER
- CONVERSIONE ANALOGICO → DIGITALE → campionamento
  → quantizzazione
- SEGNALI e SISTEMI DIGITALI nelle FREQUENZE
  - ↳ DTFT, DFT, Z
- PROGETTO di SISTEMI DIGITALI (FILTRI NUMERICI)

ANGOLI in RADIANTI

Data CIRCONF. raggio r (arbitrario)
considero ANGOLO al CENTRO α che
INDIVIDUA un ARCO $\widehat{AB}$ di lunghezza ℓ



DEF: $\boxed{\alpha_{RAD} = \frac{\ell}{r}}$ → NON DIPENDE da r
→ è ADIMENSIONALE (numero PURO)

ES: Angolo GIRO ($360°$)

$$\alpha_{RAD} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Angolo PIATTO ($180°$)

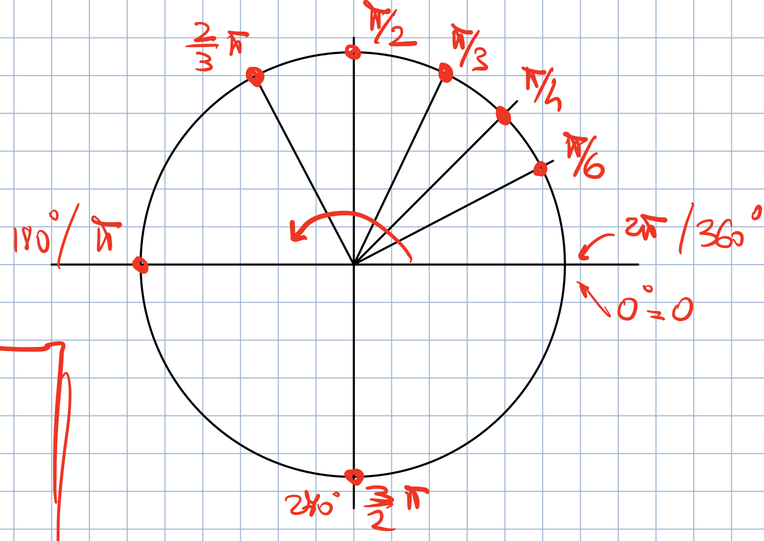
$$\alpha_{RAD} = \frac{\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = \pi$$

Generalizzando: $\alpha_{RAD} : \pi = \alpha° : 180$ →

$$\boxed{\alpha_{RAD} = \frac{\pi}{180}\alpha° \qquad \alpha° = \frac{180}{\pi}\alpha_{RAD}}$$

ANGOLI NOTEVOLI:

α°	α_{RAD}
180°	π
90°	$\pi/2$



CICLICITÀ degli ANGOLI:

$$\alpha^\circ = \alpha^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\alpha_{RAD} = \alpha_{RAD} + k \cdot 2\pi$$

NUMERI COMPLESSI

NUMERI COMPLESSI: un CAMPO $(\mathbb{C})$: la CHIUSURA ALGEBRICA di $\mathbb{R}$

Un POLINOMIO di GRADO N COMPLESSO (COEFF. COMPLESSI) ha SEMPRE N SOLUZIONI in $\mathbb{C}$ (o RADICI)

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

$\hookrightarrow \exists\, x_1, x_2, \dots x_N \in \mathbb{C}$ tali che $P(x_i) = 0$

(N VALORI di $x \in \mathbb{C}$ che AZZERANO il POLINOMIO)

Per definire il CAMPO $\mathbb{C}$ introduco l'UNITÀ IMMAGINARIA

UNITÀ IMMAGINARIA: $j = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

NUMERO COMPLESSO: SOMMA di DUE COMPONENTI: $\begin{cases} \text{parte REALE} \\ \text{parte IMMAGINARIA} \end{cases}$

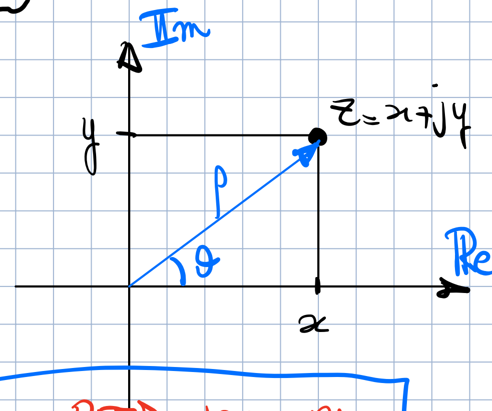
$$z \in \mathbb{C} \rightarrow z = \underbrace{x}_{\text{parte REALE}} + \underbrace{jy}_{\text{parte IMMAGINARIA}} : \begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ j = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE di NUMERI COMPLESSI

$z = x + jy \quad : \quad \langle x, y \rangle$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \langle \text{ASCISSA} \rangle \\ y \in \mathbb{R} & \langle \text{ORDINATA} \rangle \end{cases}$

PIANO di GAUSS



$z \in \mathbb{C} \quad : \quad z = x + jy \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \leftarrow$ COORD. RETTANGOLARI

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA di $z \in \mathbb{C}$ —

Posso definire z anche in coord. POLARI :

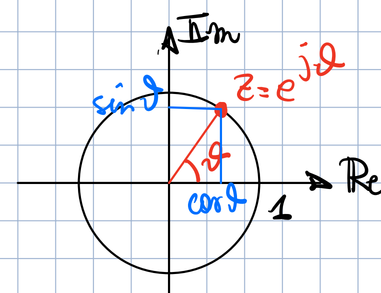
$z \leftrightarrow \langle \rho, \vartheta \rangle$ dove : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{cases}$

ϑ → FASE di z

ρ → MODULO di z

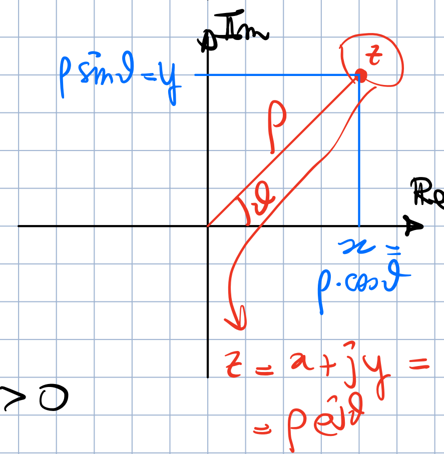
EULERO introduce l' ESPONENZIALE COMPLESSO :

$z = e^{j\vartheta} \quad : \quad \text{MODULO}: \rho = 1 \ , \ \text{FASE} = \vartheta$



$z \in \mathbb{C} \qquad z = \rho \cdot e^{j\vartheta} \qquad \langle \rho, \vartheta \rangle$

RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE di z

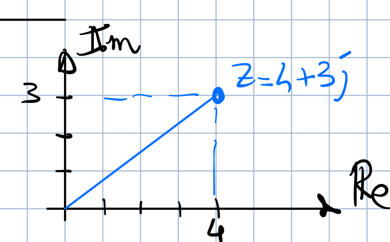


$z = \underbrace{\rho \cdot e^{j\vartheta}}_{\text{F. ESPONENZ.}} = \underbrace{x + jy}_{\text{F. ALGEBRICA}}$

$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot \sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{cases}$

ESEMPI :

Considero : $z = 4 + 3j$ (f. ALGEBRICA



$\mathrm{Re}[z] = 4$; $\mathrm{Im}[z] = 3$

In forma esponenziale ? $\rightarrow \langle \rho, \vartheta \rangle$

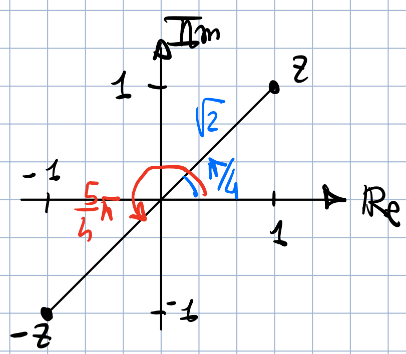
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

MODULO di z : $|z|$

FASE di z : $\measuredangle z = \vartheta = \mathrm{atan2}(y,x) = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} \simeq 0{,}64\ \mathrm{rad} \simeq 37°$

$$\boxed{z = 4+3j = 5\cdot e^{0{,}64j}} \rightarrow \vartheta : \text{IN RADIANTI}$$

CALCOLO di ATAN2( ) :



Considero : $z = 1+j$: $\langle 1, 1 \rangle$

MODULO : $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

FASE : $\measuredangle z = \mathrm{atan2}(1,1) = \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$ $(=45°)$

Considero $-z = -1-j$: $\langle -1, -1 \rangle$

MODULO : $|-z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

FASE : $\measuredangle(-z) = \mathrm{atan2}(-1,-1) = \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{-1}{-1} = \pi + \mathrm{arctg}\,1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

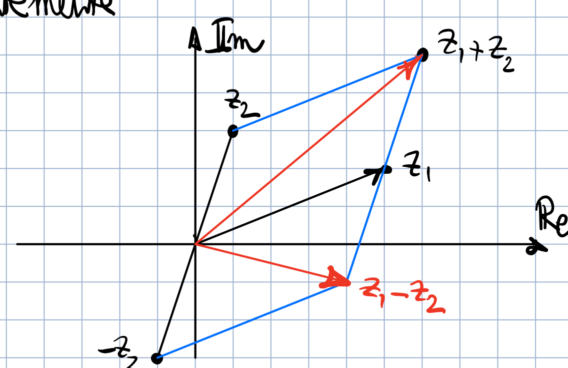
OPERAZIONI con i NUMERI COMPLESSI

SOMMA (e SOTTRAZIONE)

in forma ALGEBRICA :

Dati : $\begin{cases} z_1 = x_1 + j y_1 \\ z_2 = x_2 + j y_2 \end{cases} \rightarrow z_S = z_1 + z_2 = \underbrace{x_1 + x_2}_{x_S} + j\underbrace{(y_1+y_2)}_{y_S}$

→ sommo le parti REALE e IMMAGINARIA indipendentemente



Sul PIANO di GAUSS : → SOMMA di VETTORI

SOTTRAZIONE : $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$$z_D = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

in forma ESPONENZIALE

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta_2} \end{cases} \quad z_1 + z_2 ? \longrightarrow \text{DIFFICILE} \longrightarrow$$ CONVERTO in f. ALGEBRICA e poi SOMMO

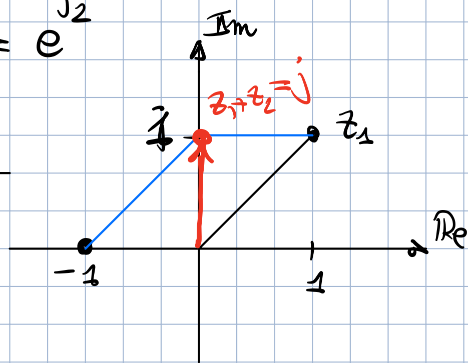
esempio:

dati: $$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\, e^{j\pi/4} \\ z_2 = e^{j\pi} \end{cases} \longrightarrow z_1 + z_2 ? \longrightarrow$$ converto in f. Algebrica:

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} = \mathrm{Re}[z_1] + j\,\mathrm{Im}[z_1] = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + j\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1 + j$$

$$z_2 = \overset{\rho}{} e^{j\overset{\vartheta}{\pi}} = 1\cos\pi + j\,1\,\cancel{\sin\pi} = -1$$

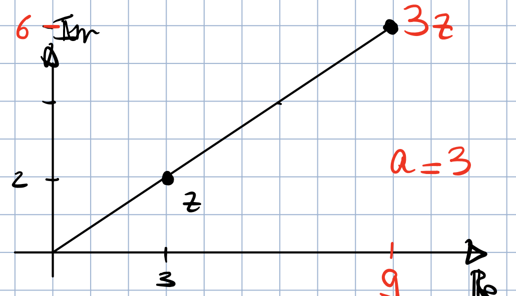
$$\Longrightarrow z_1 + z_2 = 1 + j - 1 = j = \begin{bmatrix} \rho = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \vartheta = \mathrm{atan2}(1,0) = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$



MOLTIPLICAZIONE per un NUMERO REALE (SCALATURA)

in forma ALGEBRICA:

Dati: $$\begin{cases} z = x + jy \in \mathbb{C} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow a \cdot z = \underbrace{ax}_{\mathrm{Re}} + j\underbrace{ay}_{\mathrm{Im}}$$



in forma ESPONENZIALE:

Dati: $$\begin{cases} z = \rho e^{j\vartheta} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow a \cdot z = a\rho\, e^{j\vartheta}$$

- MODULO MOLTIPLICATO per a
- FASE INVARIATA

PRODOTTO di NUMERI COMPLESSI

In forma ALGEBRICA: sfrutto l'algebra (ricordo che $j^2 = -1$)

Dati: $$\begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \longrightarrow z_p = z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + \overset{-y_1y_2}{j^2 y_1 y_2} =$$

$$= \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{x_p} + j\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{y_p} = x_p + jy_p$$

In forme ESPONENZIALE:

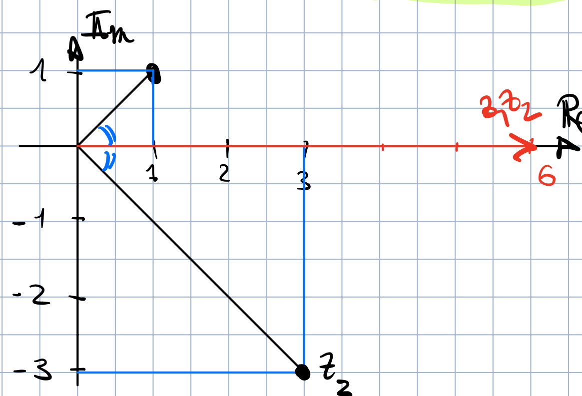
dati: $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta_2} \end{cases} \longrightarrow z_p = \rho_p e^{j\vartheta_p} \quad \rho_p, \vartheta_p \ ?$

$$\begin{cases} \rho_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \dots = \rho_1\rho_2 \\ \vartheta_p = \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{matrix} \right)$$

dati: $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta} \end{cases} \quad z_p = z_1 \cdot z_2 = \rho_p e^{j\vartheta_p} = \rho_1\rho_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

- MODULO: PRODOTTO MODULI
- FASE: SOMMA FASI

Esempio: $z_1 = 1 + j$, $z_2 = 3 - 3j$ $\longrightarrow$ calcolare $z_1 z_2$



in forme ALGEBRICA:

$$z_1 z_2 = (1+j)(3-3j) = 3 - \cancel{3j} + \cancel{3j} + 3 = 6$$

in forme ESPONENZIALE:

$$z_1 = 1 + j = \rho_1 e^{j\vartheta_1} = \sqrt{1^2 + 1^2}\, e^{j \operatorname{arctg} \frac{1}{1}} = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = 3 - 3j = \sqrt{3^2 + 3^2}\, e^{j \operatorname{arctg} \frac{-3}{3}} = 3\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\longrightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}\, e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = 6\, \cancel{e^{j0}} = 6 \ \checkmark$$

COMPLESSO CONIUGATO

Dato $z \in \mathbb{C}$, si definisce COMPLESSO CONIUGATO di z: $\bar{z}$ (o z^*) il numero:

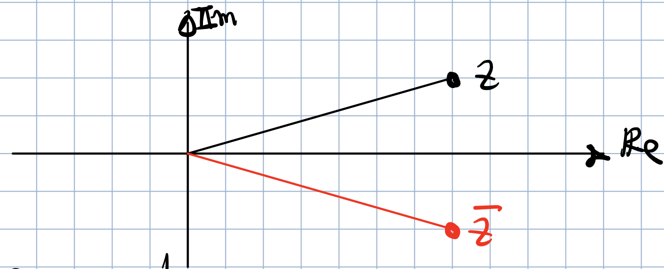
con: $\begin{cases} \text{la } \underline{\text{STESSA}} \text{ PARTE REALE di } z \\ \text{PARTE IMMAGINARIA } \underline{\text{OPPOSTA}} \end{cases}$; $\begin{cases} \text{STESSO MODULO di } z \\ \text{FASE OPPOSTA} \end{cases}$

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = x + jy = \rho e^{j\vartheta} \longrightarrow \bar{z} = x - jy = \rho e^{-j\vartheta}$$

PROPRIETÀ del COMPLESSO CONIUGATO:

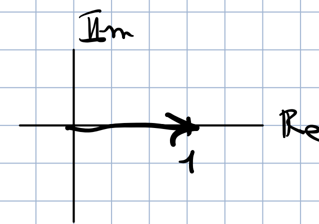
SOMMA: $z + \bar{z} = (x + \cancel{jy}) + (x - \cancel{jy}) = 2x = 2\operatorname{Re}[z] \in \mathbb{R}$ è REALE

PRODOTTO: $z \cdot \bar{z} = (x+jy)(x-jy) = x^2 + \cancel{jxy} - \cancel{jxy} + y^2 = x^2+y^2 = \rho^2 = |z|^2 \geq 0$ è REALE e POSITIVO



INVERSO di un num. COMPLESSO

Dato $z \in \mathbb{C}$ $\quad z^{-1}$ tale che $z \cdot z^{-1} = 1$



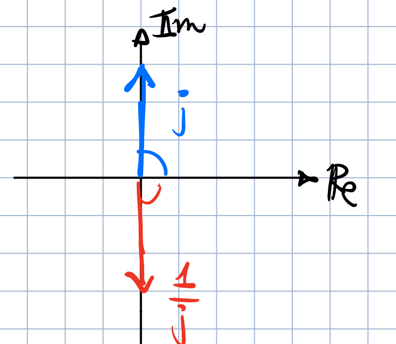
- in f. ESPONENZIALE: $z = \rho e^{j\vartheta} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{j(-\vartheta)}$

  Verifica $z \cdot z^{-1} = \rho e^{j\vartheta} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-j\vartheta} = \rho \frac{1}{\rho} e^{j(\vartheta - \vartheta)} = 1$ ✓

- in forma ALGEBRICA:

  ricordo che $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \longrightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$ $\quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

  dato $z = x + jy \longrightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - jy}{x^2+y^2}$



ESEMPIO: INVERSO di $z = j$ $\quad z = \frac{1}{j}$ $\quad \boxed{\frac{1}{j} = -j}$

F. ESP: $z = 1 e^{j\frac{\pi}{2}} \longrightarrow z^{-1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

F. ALG: $z = j \longrightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-j}{0^2+1^2} = -j$

DIVISIONE fra NUMERI COMPLESSI: MOLTIPLICAZIONE per l'INVERSO: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$

in forma ESPONENZIALE:

dati $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta_2} \end{cases} \longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} e^{-j\vartheta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$

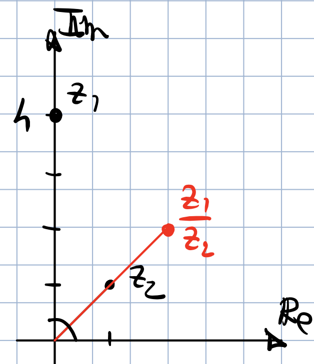
$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2} e^{-j\vartheta_2}$

MODULO: RAPPORTO MODULI

FASE: DIFFERENZA tra le FASI

in forma ALGEBRICA:

$$\text{dati}\begin{cases} z_1 = x_1 + j y_1 \\ z_2 = x_2 + j y_2 \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$



Esempio: $\text{dati}\begin{cases} z_1 = 4j \\ z_2 = 1+j \end{cases} \rightarrow$ calcolare $\frac{z_1}{z_2}$

$$\text{Alg}: \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \cancel{4}^{2} j \frac{1-j}{\cancel{1^2+1^2}} = 2j(1-j) = 2j + 2 = 2 + 2j$$

$$\text{Exp}: \begin{cases} z_1 = 4e^{j\pi/2} \\ z_2 = \sqrt{2}\, e^{j\pi/4} \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1-\vartheta_2)} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$$

ELEVAMENTO a POTENZA di NUMERI COMPLESSI

In forma ESPONENZIALE:

$$\text{Dato } z = \rho e^{j\vartheta} \qquad z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}^{n \text{ VOLTE}} = \rho^n e^{jn\vartheta}$$

: MODULO: ELEVATO a n; FASE: Moltiplicata per n

In forma ALGEBRICA: svolgo algebricamente:

$$z = x + jy \longrightarrow z^n = (x+jy)^n = x^n + x^{n-1} \cdot jy + \ldots + (jy)^n$$

ESTRAZIONE di RADICE n-ESIMA

DEF: $y = \sqrt[n]{z}$ SSE $y^n = z$ $\quad y, z \in \mathbb{C} \quad n \in \mathbb{Z}$

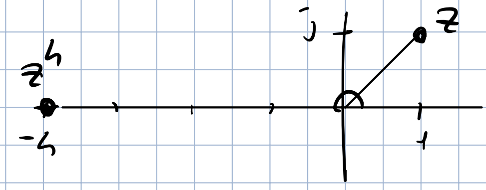
$\rightarrow \quad y^n - z = 0$: POLINOMIO di GRADO n in y $\longrightarrow$ <u>n SOLUZIONI in $\mathbb{C}$!</u>

$$\text{Dato } z = \rho e^{j\vartheta} \rightarrow \boxed{y_i = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{j\frac{\vartheta + 2\pi i}{n}} \; ; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1}$$

$$\text{Verifico}: y_i^n = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n e^{j\frac{\vartheta+2\pi i}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}} = \rho\, e^{j(\vartheta + 2\pi i)}$$

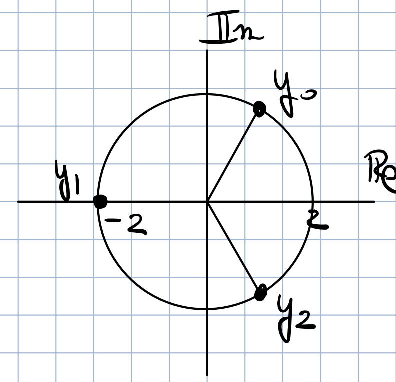
ESEMPIO:

$$z = (1+j)^4 = \left(\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 e^{j\frac{\pi}{4}4} = 4e^{j\pi} = -4$$



Calcolare $y = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8e^{j\pi}}$

$\rightarrow y_i = \sqrt[3]{8e^{j\pi}} = \sqrt[3]{8}\, e^{j\frac{\pi+2\pi i}{3}}, \quad i = 0,1,2$

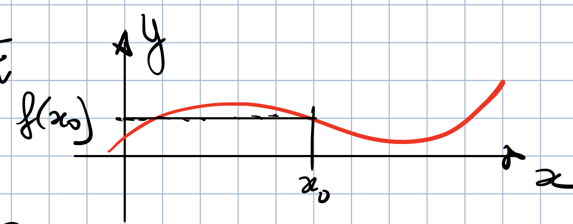


$$\begin{cases} y_0 = 2e^{j\frac{\pi}{3}} \longrightarrow y_0^3 = 2^3 e^{j\frac{\pi}{3}3} = 8e^{j\pi} \\ y_1 = 2e^{j\frac{\pi+2\pi}{3}} = 2e^{j\pi} \longrightarrow y_1^3 = 2^3 e^{j\pi\cdot 3} = 8e^{j3\pi} \\ y_2 = 2e^{j\frac{\pi+4\pi}{3}} = 2e^{j\frac{5}{3}\pi} \longrightarrow y_2^3 = 2^3 e^{j5\pi} \end{cases}$$

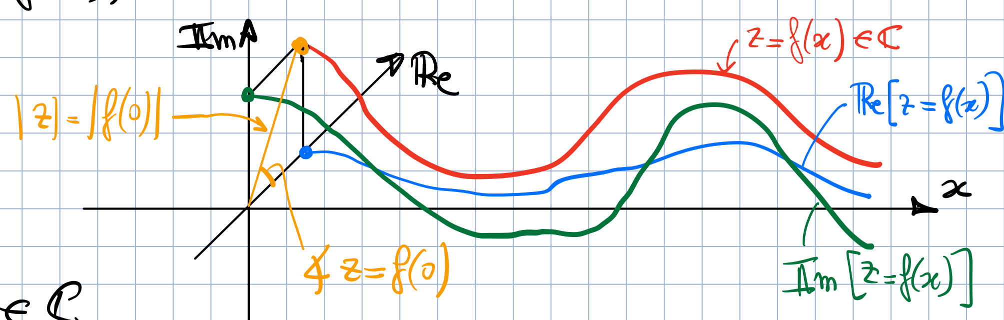
RAPPRESENTAZIONE di FUNZIONI COMPLESSE di variabile REALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funz. REALE di VAR. REALE

$y = f(x)$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad z = f(x), \; x \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{C}$



Data $z = f(x), \; x \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{C}$

rappr. ALGEBRICA di $z = f(x)$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[z] = \mathrm{Re}[f(x)] \in \mathbb{R} \leftarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}[z] = \mathrm{Im}[f(x)] \in \mathbb{R} \end{cases}$$

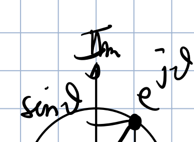
rappr. ESPONENZIALE di $z = f(x)$:

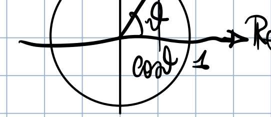
$|z| = |f(x)| \in \mathbb{R}^+$

$\measuredangle z = \measuredangle f(x) \in \mathbb{R} \quad (0 - 2\pi)$

Esempio di f. complessa: il FASORE (o ESPONENZIALE COMPL.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}: \quad z = f(x) = Ae^{jx}, \; x \in \mathbb{R}, \; z = \mathbb{C}$



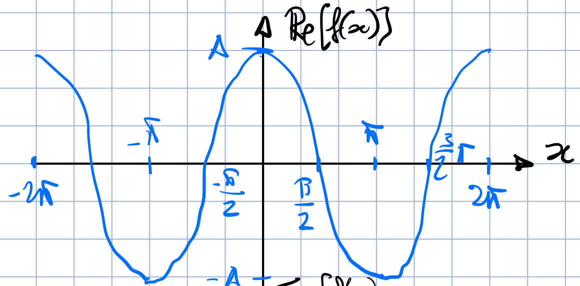


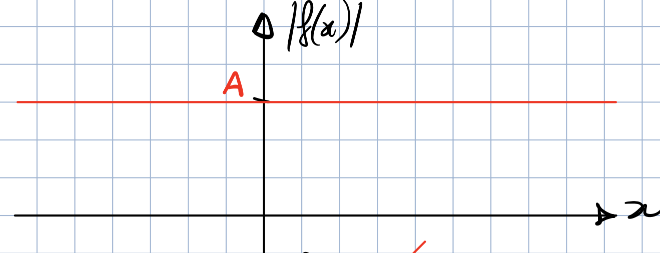
$$\left[\text{Eulero}: \; e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta\right]$$

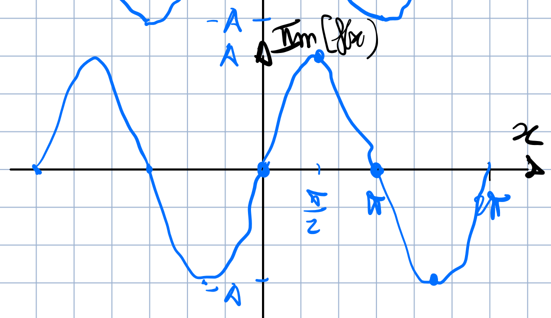
$$f(x) = A e^{jx} = \underbrace{A\cos x}_{Re} + j\underbrace{A\sin x}_{Im}$$

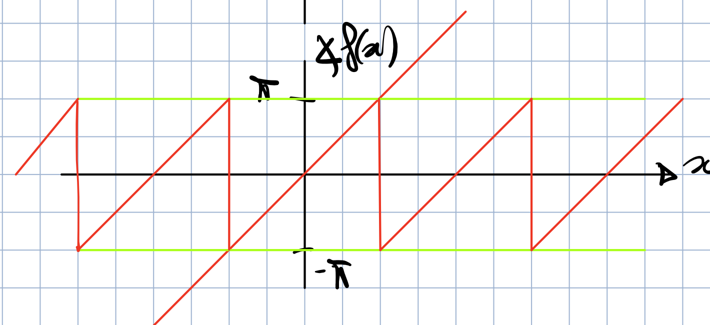
$$\begin{cases} Re[f(x)] = A\cos x \\ Im[f(x)] = A\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} |f(x)| = |Ae^{jx}| = |A|\overbrace{|e^{jx}|}^{=1} = A \\ \measuredangle f(x) = \measuredangle Ae^{jx} = x \end{cases}$$









RAZIONALIZZAZIONE di FRAZIONI COMPLESSE

$$z = \frac{4-j}{1+3j} = \frac{z_1}{z_2}$$ RAZIONALIZZARE = RICONDURRE a n. COMPLESSO

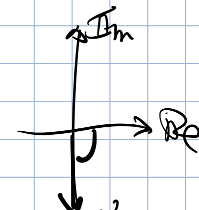
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$z = \frac{4-j}{1+3j} = \frac{(4-j)(1-3j)}{(1+3j)(1-3j)} = \frac{4-12j-j-3}{1^2+3^3} = \frac{1}{10}(1-13j) = \frac{1}{10} - \frac{13}{10}j$$

ESERCIZI di RIEPILOGO

Calcolare: $z = \dfrac{3+4j}{-2j}$ in f. ALG. e EXP.

f. ALG.: $z = \dfrac{3+4j}{-2j}\cdot\dfrac{2j}{2j} = \dfrac{(3+4j)\cancel{2}j}{2^{\cancel{2}}} = \dfrac{3j-4}{2} = -2+\dfrac{3}{2}j$



f. EXP: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$; $z_1 = \sqrt{3^2+4^2}\,e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{4}{3}} = 5e^{j\,0{,}3\pi}$; $z_2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$\hookrightarrow \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)} = \frac{5}{2} e^{-j0.8\pi}$$ Sono uguali?

Calcolare: $$z = 3\sqrt{2}\, e^{j\pi/4} + \frac{(2j)^2}{1+j} = 3\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{-4}{1+j}$$

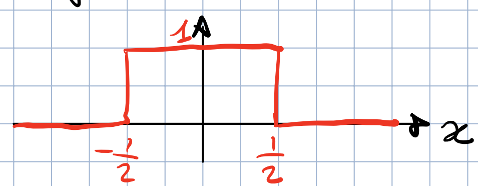
$$\rightarrow \frac{-4}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} = \frac{-4+4j}{2} = -2+2j$$

[Eulero:] $$3\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3+3j$$

$$\rightarrow z = 3+3j+(-2+2j) = 1+5j$$

ES: rappr. graficamente la funzione: $y(x) = \mathrm{rect}(x)\, e^{j2\pi x}$

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



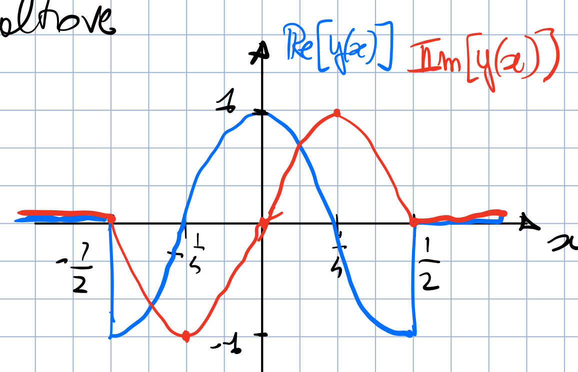
$$\rightarrow y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{C}$$

a) Re[ ] ; Im[ ] : utilizziamo f. Eulero

$$\rightarrow y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} = \cos(2\pi x) + j\sin(2\pi x) & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y_{Re}(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x) & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y_{Im}(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



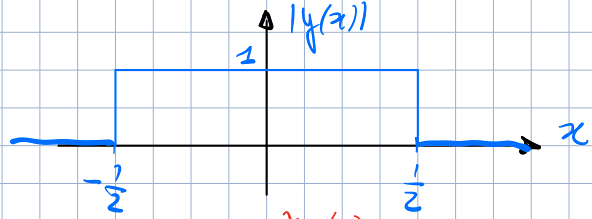
b) MODULO e FASE

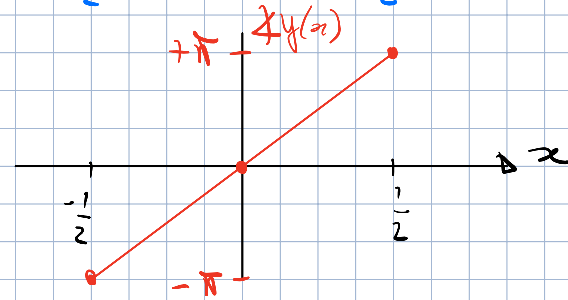
$$y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$|y(x)| = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{rect}(x)$$

$$\angle y(x) = \begin{cases} 2\pi x & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \nexists & \text{altrove} \end{cases}$$

$|z| = 0 \rightarrow \angle z$ NON ESISTE !!





SEGNALI → VETTORE di INFORMAZIONE

SEGNALE ≡ FUNZIONE

SEGNALE: GRANDEZZA FISICA, FUNZIONE di un'ALTRA GRANDEZZA (tempo, spazio)

VARIABILE INDIPENDENTE

SEGNALE: $y = f(x)$, $f: A \rightarrow B$

$x \in A$: il DOMINIO di f

$y \in B$: il CODOMINIO di f

Es: SUONO: Pressione $= f(\text{tempo})$ $\quad t \in \mathbb{R}$; $P \in \mathbb{R}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

IMMAGINE: Colore $= f(\text{spazio 2D})$ $\quad s \in A \subseteq \mathbb{R}^2$; $C \in B \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

CLASSIFICAZIONE di SEGNALI

Dato un segnale $y = f(x)$ con $f: A \rightarrow B$; $\begin{cases} x \in A: \text{DOMINIO di } f \\ y \in B: \text{CODOMINIO di } f \end{cases}$

CONTINUITÀ di un SEGNALE:

- CONTINUITÀ del DOMINIO A: