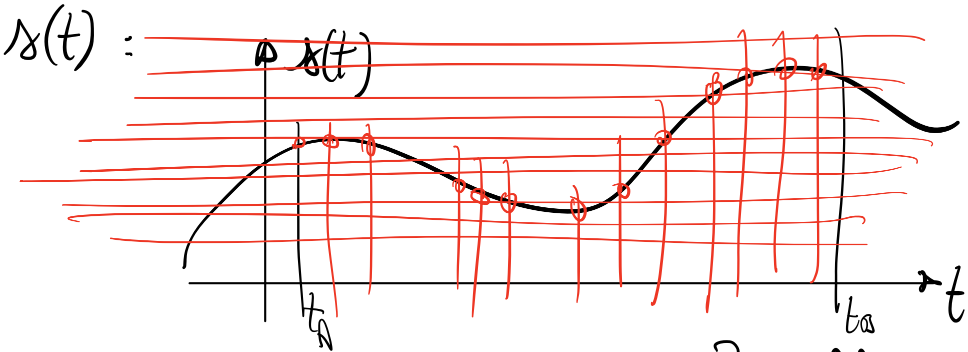
CONVERSIONE ANALOGICO / DIGITALE

Considero un segnale $s(t)$:



$s(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

segnale ANALOGICO

POSSO RAPPRESENTARE $s(t)$ con un SISTEMA DIGITALE? NO

COME POSSO FARE?

1) DISCRETIZZAZIONE dei TEMPI $\longrightarrow$ CAMPIONAMENTO

$$s(t),\ t \in \mathbb{R},\ t_A < t < t_B \longrightarrow s(t_i) \qquad t_A < t_i < t_B,\ i = 1, N$$

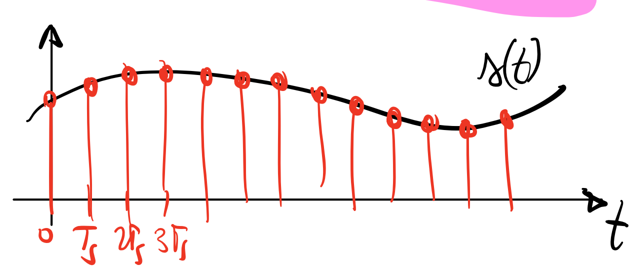
2) DISCRETIZZAZIONE delle AMPIEZZE $\longrightarrow$ QUANTIZZAZIONE

$$s(t_i),\ S_{min} < s(t_i) < s_{max} \longrightarrow s_q(t_i),\quad s_q \in Q = \{\underbrace{q_1}_{S_{MIN}}, q_2, \dots \underbrace{q_M}_{S_{MAX}}\}$$

CONVERSIONE ANALOGICO → DIGITALE:

$$s(t),\ t \in \mathbb{R},\ t_A < t < t_B \xrightarrow{A \to D} s_q(t_i),\ \begin{cases} t_A < t_i < t_B, & i = 1 \dots N \\ s_q() \in Q = \{q_1, \dots q_M\} \end{cases}$$

CAMPIONAMENTO



CAMPIONAMENTO UNIFORME:

Passo di campionamento COSTANTE: T_s

T_s: PERIODO di CAMPIONAMENTO [s]

$$\boxed{\text{CAMP. UNIFORME: } s(t),\ t \in \mathbb{R} \longrightarrow \overbrace{s(nT_s) := s(n)}^{\text{SEGNALE DISCRETO}},\ n \in \mathbb{Z}}$$

$f_s = \frac{1}{T_s}$: FREQUENZA di CAMPIONAMENTO $[s^{-1} = Hz]$

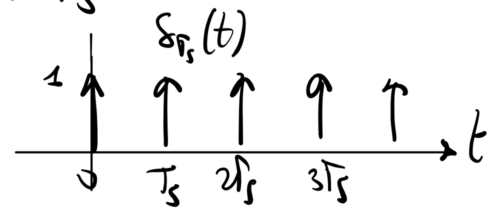
Come rappresentare MATEMATICAMENTE questa OPERAZIONE?

$$s(t) \longrightarrow s(t_0) = s(t) \cdot \delta(t-t_0) = s(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

CAMPIONAMENTO IDEALE : i CAMPIONI sono IMPULSI di DIRAC :

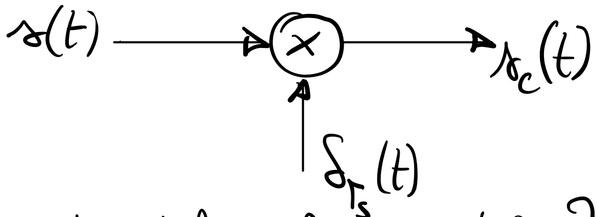
→ definisco una SEQUENZA di IMPULSI a CADENZA T_s :

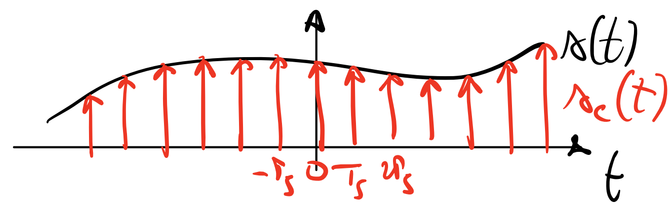
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



→ SEGNALE CAMPIONATO : PRODOTTO di $s(t)$ e $\delta_{T_s}(t)$:

$$\boxed{s_c(t) = s(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = s(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} s(nT_s)\, \delta(t - nT_s)}$$





Che caratteristiche ha $s_c(t)$?

SPETTRO del SEGNALE CAMPIONATO

$$s_c(t) = s(t) \cdot \delta_{T_s}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_c(f) = S(f) * \Delta_{T_s}(f)$$

Devo calcolare $\Delta_{T_s}(f)$; osservo che $\delta_{T_s}(t)$ è PERIODICO, periodo T_s

→ Calcolo FS :

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t}$$

Calcolo c_n :

$$c_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \delta_{T_s}(t)\, e^{-j2\pi \frac{n}{T_s}t}\,dt = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \delta(t)\, e^{-j2\pi\frac{n}{T_s}t}\,dt = \frac{1}{T_s}\cdot 1 = \frac{1}{T_s}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

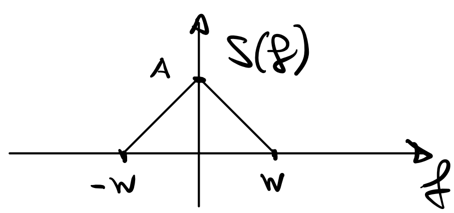
Quindi:
$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T_s}t}$$

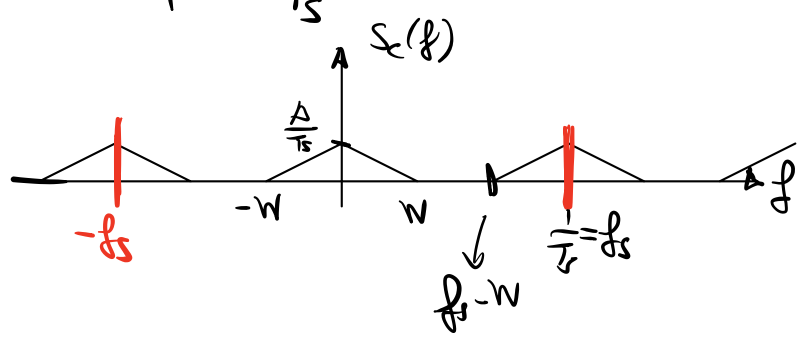
Trasformo:
$$\Delta_{T_s}(f) = \mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T_s}t}\right\} = (\text{LINEARITÀ}) =$$
$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{e^{j2\pi\frac{n}{T_s}t}\right\} = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right) \qquad \left[e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f-f_0)\right]$$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \longleftrightarrow \Delta_{T_s}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

Quindi:
$$\boxed{S_c(f)} = S(f) * \Delta_{T_s}(f) = S(f) * \left[\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)\right] = \boxed{\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f-\frac{n}{T_s}\right)}$$

$S_c(f)$ è la RIPETIZIONE PERIODICA di $S(f)$ in corrispondenza dei MULTIPLI di $\frac{1}{T_s}=f_s$, MOLTIPLICATO per $1/T_s$

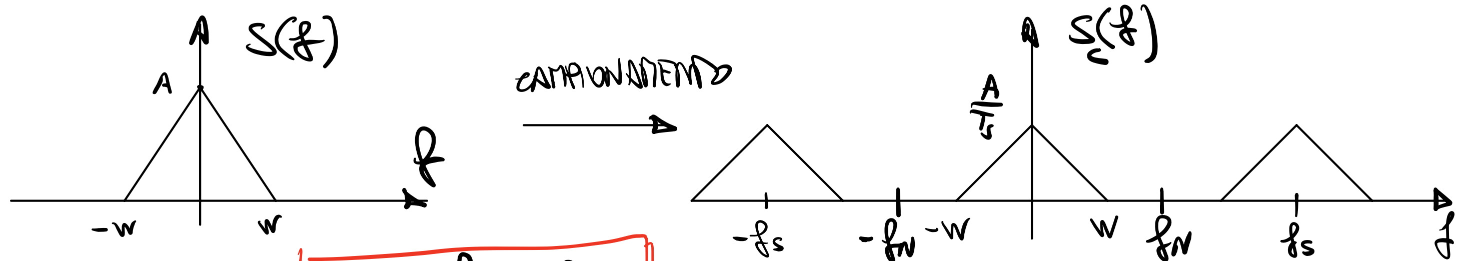




2 CASI POSSIBILI:

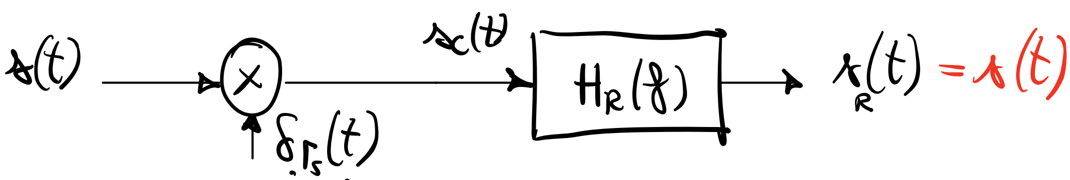
- SPETTRI "DISGIUNTI" $\quad f_s > 2W \quad \left(W < \frac{f_s}{2}\right)$
- " NON DISGIUNTI

TEOREMA del CAMPIONAMENTO (NYQUIST-SHANNON, 1928)
Un SEGNALE con BANDA LIMITATA SUPERIORMENTE a W può essere RICOSTRUITO UNIVOCAMENTE a partire dai suoi CAMPIONI sse il CAMPIONAMENTO avviene a FREQUENZA $f_s > 2W$



$$\boxed{W < \frac{f_s}{2} = f_N}$$ → è possibile la RICOSTRUZIONE

RICOSTRUZIONE



Serve un PASSA-BASSO ideale, GUADAGNO $= T_s$, $f_T = f_N$:

$$H_R(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq f_N = f_s/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = T_s \, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s \, \mathrm{rect}(f T_s)$$

Verifico:

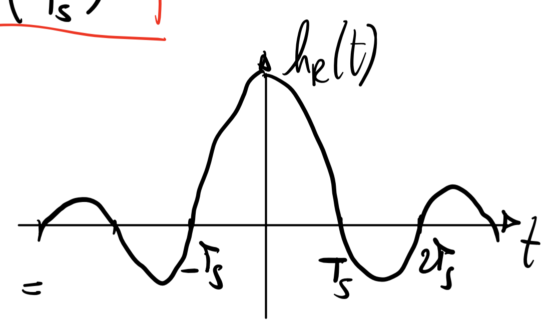
$$S_R(f) = S_c(f) \cdot H_R(f) = \cancel{\frac{1}{T_s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \cdot \cancel{T_s} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = S(f)$$ ✓

Ricostruzione nel dominio dei TEMPI :

$$S(f) = S_c(f) \cdot H_R(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} s(t) = s_c(t) * h_R(t)$$

$$H_R(f) = \frac{1}{f_s} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{h_R(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)}$$

$$h_R(t = nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

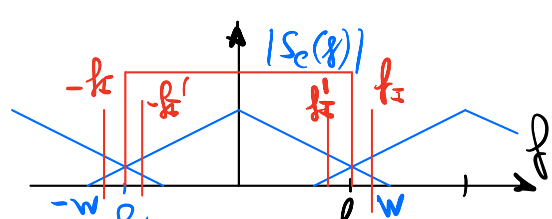


$$s(t) = s_c(t) * h_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\,\delta(t - nT_s) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) \left[\delta(t - nT_s) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Se $f_s > 2W$ <u>NON</u> viene RISPETTATO ?

↳ ALIASING (EQUIVOCAZIONE)



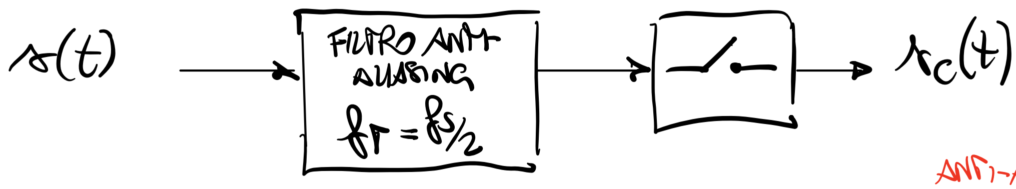
$-f_N$ $\quad \frac{f_s}{2} \quad f_s$

Come evito l'aliasing?

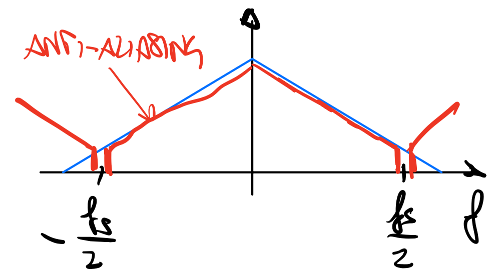
1) Dato $s(t) \rightarrow$ dato $W \longrightarrow f_s > 2W$

2) Data $f_s \longrightarrow$ devo imporre che $W \leq f_s/2$

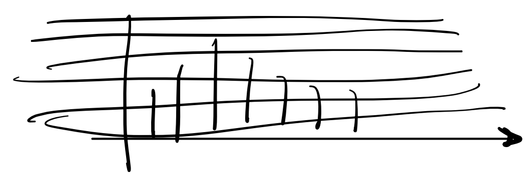
↳ filtro passa basso $f_T = \frac{f_s}{2}$: FILTRO ANTIALIASING



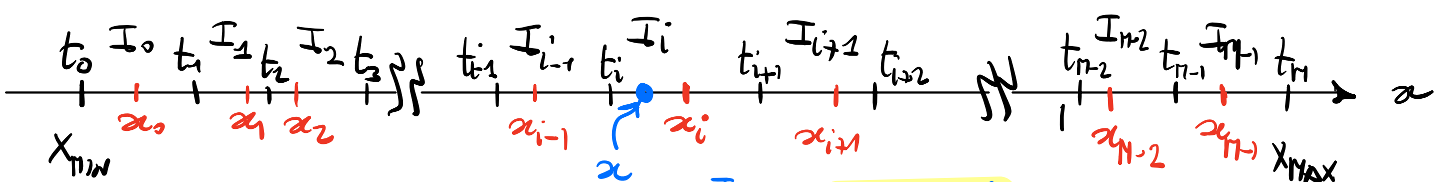
$$H_{AA}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_s/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$



QUANTIZZAZIONE



Dato $x(t)$: $\quad X_{MIN} \leq x(t) \leq X_{MAX} \quad \{X_{MIN}; X_{MAX}\}$: ESCURSIONE di x



↳ $x \in I_i \longrightarrow x \rightarrow x_i$

Intervallo $\{X_{MIN} : X_{MAX}\}$ viene suddiviso in M intervalli:

- M intervalli di quantizzazione I_i, $i = 0 \dots M-1$ delimitati da:
- $M+1$ soglie di quantizzazione: t_i, $i = 0 \dots M$, $\left(\text{dove } \begin{cases} t_0 = X_{MIN} \\ t_M = X_{MAX} \end{cases}\right)$

In ciascun intervallo I_i definiamo un VALORE RAPPRESENTATIVO x_i :

x_i, $i = 0 \dots M-1$: $\quad x_i \in I_i \longrightarrow t_i \leq x_i < t_{i+1}$

→ detti LIVELLI di QUANTIZZAZIONE

QUANTIZZAZIONE: SOSTITUZIONE (APPROSSIMAZIONE) dell'ampiezza x con il suo VALORE RAPPRESENTATIVO x_i, dove $x \in I_i$

Dato $x \in [X_{MIN}, X_{MAX}]$, $x \in I_i \;\updownarrow\; (t_i < x \le t_{i+1})$ $\xrightarrow{\text{QUANTIZZAZIONE}}$ $x \to x_q = x_i$

$x_i \in Q = \{x_0, x_1, \dots x_{M-1}\}$

$$x \in [X_{MIN}, X_{MAX}],\; x \in I_i \longrightarrow \boxed{Q} \longrightarrow x_q = x_i \in Q$$

QUANTIZZAZIONE UNIFORME

- L'ESCURSIONE $[X_{MIN}; X_{MAX}]$ viene SUDDIVISA in M INTERVALLI di UGUALE AMPIEZZA : Δ

$$\boxed{\Delta = \frac{X_{MAX} - X_{MIN}}{M} \quad : \text{PASSO di QUANTIZZAZIONE}}$$

- Il VALORE RAPPRESENTATIVO x_i è il VALOR MEDIO di I_i :

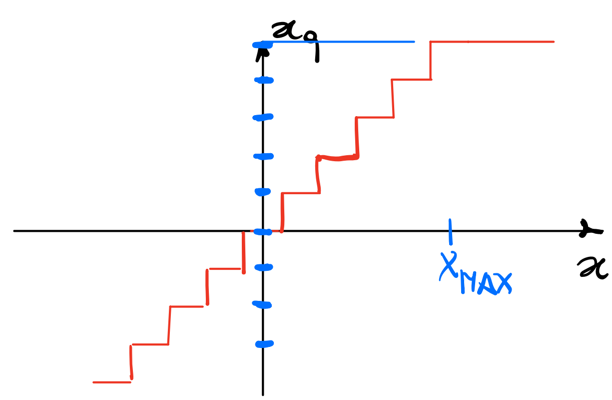
$$\boxed{x_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2} = t_i + \frac{\Delta}{2}}$$

- M IN GENERE è una POTENZA di 2 : $\boxed{M = 2^n}$ QUANTIZZAZIONE a n BIT/CAMPIONE

  Mi servono n BIT per rappresentare gli M INTERVALLI

DESCRIZIONE della QUANTIZZAZIONE con DIAGRAMMA IN/OUT

$$x \longrightarrow \boxed{Q} \longrightarrow x_q$$



$$x \in I_i \xrightarrow{Q} x_q = Q(x) = x_i$$

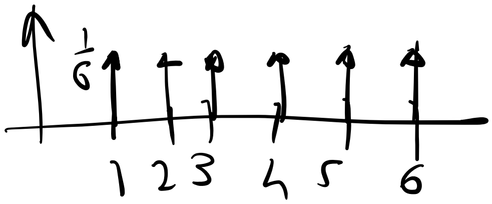
- la QUANTIZZAZIONE è IRREVERSIBILE $(x \to x_q)$
- $x \to x_q$: $x_q - x = e_q$ ERRORE di QUANTIZZAZIONE

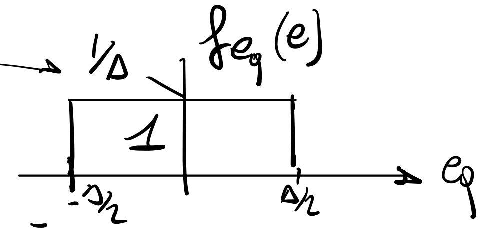
ERRORE di QUANTIZZAZIONE : che effetto ha sul segnale ?

CARATTERISTICHE di e_q:

* e_q è LIMITATO tra $\pm\Delta/2$: $-\frac{\Delta}{2} \le e_q < \frac{\Delta}{2}$, $\Delta = \frac{X_{MAX}-X_{MIN}}{M} = \frac{X_{PP}}{2^n}$

* e_q è VARIABILE CASUALE UNIFORME



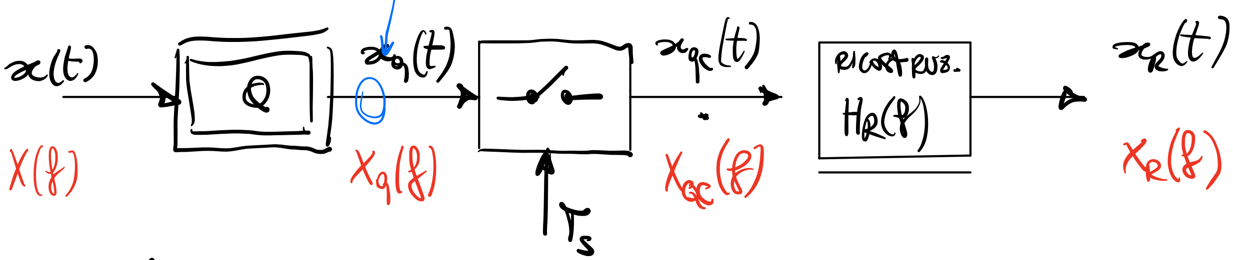


DENSITÀ di PROBABILITÀ: $f_{e_q}(e) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{per } -\frac{\Delta}{2} \le e < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

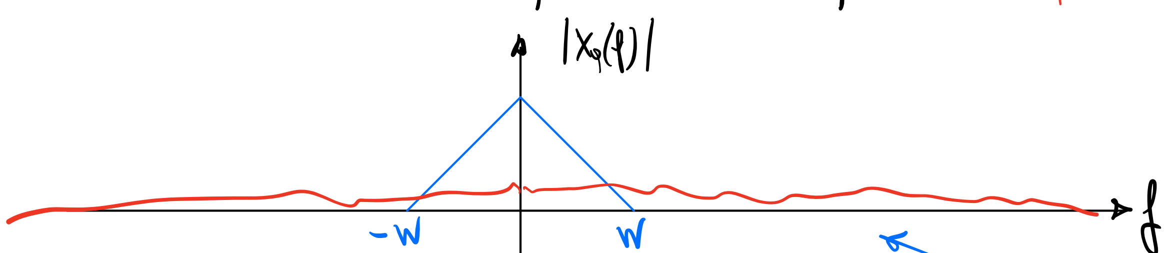
$e_q = x_q - x \longrightarrow \boxed{x_q(t) = x(t) + e_q(t)}$

EFFETTO della QUANTIZZAZIONE sul segnale:

Invertiamo CAMPIONAMENTO e QUANTIZZAZIONE:

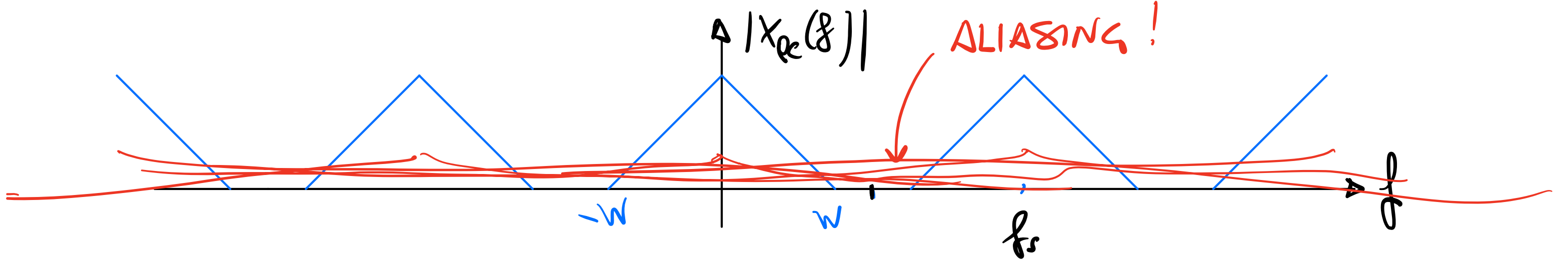


A valle del QUANTIZZATORE: $x_q(t) = x(t) + e_q(t) \rightarrow X_q(f) = X(f) + E_q(f)$

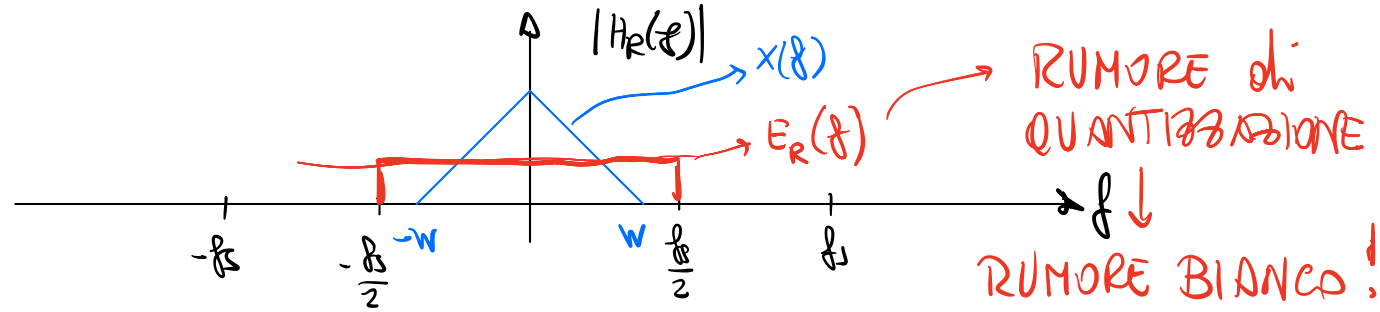


* $e_q(t)$ ha POTENZA << POTENZA di $x(t)$
* SPETTRO di $e_q(t)$ [$E_q(f)$] è MOLTO PIÙ ESTESO di $X(f)$

A valle del CAMPIONATORE: $X_{qc}(f)$ è la REPLICA PERIODICA di $X_q(f)$



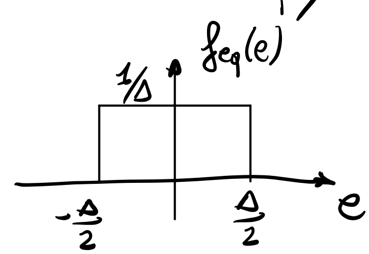
In uscita dal filtro di ricostruzione: $x_R(t) \to X_R(f)$



POTENZA del RUMORE di QUANTIZZAZIONE

↳ VALOR MEDIO del QUADRATO di e_q (VALORE QUADRATICO MEDIO di e_q)

$$P_Q = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f_{e_q}(e)\, e^2 \cdot de = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de =$$



$$\boxed{P_Q = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{e^3}{3}\right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\Delta^3}{24} + \frac{\Delta^3}{24}\right] = \frac{\Delta^2}{12}}$$

Noi siamo interessati al: RAPPORTO SEGNALE/RUMORE (SIGNAL/NOISE RATIO: SNR) → $SNR = \frac{P_S}{P_N}$?

Per definire la potenza del segnale consideriamo.

POTENZA di PICCO

Per segnali BIPOLARI: $V_{MIN} = -A$; $V_{MAX} = +A$ → ESCURSIONE: $2A = V_{pp}$

↳ POTENZA di PICCO: $P_{pk} = (\pm A)^2 = A^2 = \left(\frac{V_{pp}}{2}\right)^2 = \frac{V_{pp}^2}{4}$

POTENZA MEDIA:

$$P_{S,MEDIA} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)\,dt = \int s^2 \cdot f_S(s)\,ds = f_{PEAK} \cdot P_{PEAK},$$

FATTORE di PICCO

$0 \le f_{PEAK} \le 1$

RAPPORTO SEGNALE/RUMORE di QUANTIZZAZIONE:

$$SNR_Q = \frac{P_S}{P_Q}$$

SNR$_Q$ di PICCO: $\longrightarrow$ $SNR_{Q,PEAK} = \frac{P_{PK}}{P_Q} = \frac{V_{PP}^2/4}{\Delta^2/12} = \left(V_{PP} = M\cdot\Delta = 2^n\cdot\Delta\right)$

$$\boxed{SNR_{Q,PICCO} = \frac{(2^n\cdot\Delta)^2 \cancel{/4}}{\Delta^2 \cancel{/12}} = 3\cdot 2^{2n}}$$

$\rightarrow$ DIPENDE SOLO da n (da M)

SNR$_Q$ MEDIO:

$$\boxed{SNR_{Q,MEDIO} = \frac{P_{S,N}}{P_Q} = \frac{f_{PEAK}\cdot P_P}{P_Q} = f_{PEAK}\cdot 3\cdot 2^{2n}}$$

$$\boxed{n = \log_2 M \quad : \text{RISOLUZIONE della QUANTIZZAZIONE}}$$

SNR in SCALA LOGARITMICA

DECIBEL: RAPPORTO tra AMPIEZZE o POTENZE

Per rapporti tra AMPIEZZE: $\left.\frac{A_1}{A_2}\right|_{dB} = 20\log_{10}\frac{A_1}{A_2}$

Per " " POTENZE: $\left.\frac{P_1}{P_2}\right|_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_1}{P_2}$

SNR in dB:

$$\left.SNR_{PICCO}\right|_{dB} = 10\log_{10}(SNR_{Q,P}) = 10\log_{10}(3\cdot 2^{2n}) = 10\left[\log_{10}3 + 2n\log_{10}2\right] =$$

$$\simeq 4{,}77 + 6{,}02\,n$$

$$\left.SNR_{MEDIO}\right|_{dB} = 10\log_{10}(f_{PK}\cdot 3\cdot 2^{2n}) = 10\left[\log_{10}f_P + \log_{10}3 + 2n\log_{10}2\right] = f_P|_{dB} + 4{,}77 + 6{,}02

ESEMPIO:

Dato segnale con $f_{PEAK} = 0,25$ da quantizzare con $SNR_{Q,M} > 2000$

$$SNR_{Q,M} = f_{PEAK} \cdot 3 \cdot 2^{2n} > 2000$$

$$2^{2n} > \frac{2000}{3 f_{PEAK}} = \frac{2000}{0,75} \longrightarrow 2^{n} > \sqrt{\frac{2000}{0,75}} \cong 51,64$$

$$\log_2(2^n) = n > \log_2 51,64 \approx 5,7 \longrightarrow n = 6 \text{ bit} \quad (M = 64)$$

ES: con quale RISOLUZIONE devo quantizzare un segnale per ottenere un $SNR_{PICCO}|_{dB} > 60$ dB

$$SNR_P|_{dB} = 4,77 + 6,02\, n > 60 \text{ dB}$$

$$\rightarrow n > \frac{60 - 4,77}{6,02} \approx 9,17 \longrightarrow n = 10 \text{ bit} \quad (M = 1024)$$

In forma LINEARE: $SNR_{Q,P} > 10^6 = 1000000$

$$SNR_{Q,P} = 3 \cdot 2^{2n} > 10^6 \rightarrow 2^{2n} > \frac{10^6}{3} \rightarrow 2^n > \frac{10^3}{\sqrt{3}} \approx 577$$

$$\rightarrow 2^{10} = 1024 \rightarrow n = 10 \text{ bit}$$

ESERCIZIO:

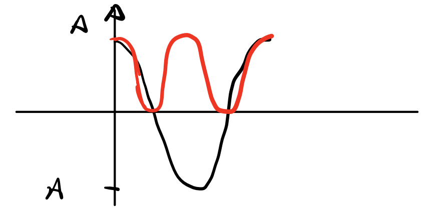
Sia dato: $s(t) = A\cos(2\pi f_i t)$ dove f_i varia LENTAMENTE tra 0 e 20 kHz.
Come convertire $s(t)$ in DIGITALE garantendo $SNR_{Q,MEDIO} > 90$ dB.

a) definire $f_S > 2 f_{MAX} = 2 \cdot 20$ kHz $\rightarrow f_S \geq 40$ kHz

$$P_{PICCO} = (\pm A)^2 = A^2$$

$$P_{MEDIA} = (\text{in 1 PERIODO}) = \frac{1}{T}\int_T s^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cos^2(2\pi f_i t)\,dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \cos^2(2\pi f_1 t)\,dt = \frac{A^2}{2}\int_0^T \frac{1}{2}\left[1+\cos(4\pi f_1 t)\right]dt =$$



$$= \frac{A^2}{T}\left\{ \underline{\int_0^T \frac{1}{2}\,dt} + \frac{1}{2}\cancel{\int_0^T \cos(4\pi f_1 t)\,dt} \right\} = \frac{A^2}{\cancel{T}}\left[\frac{\cancel{T}}{2}+0\right] = \frac{A^2}{2}$$

$$f_{PEAK} = \frac{P_{MEDIA}}{P_{PICCO}} = \frac{1}{2} \longrightarrow f_P\big|_{dB} = 10\log_{10}\frac{1}{2} = -3\,dB$$

$$SNR_{Q,n}\big|_{dB} > 90\,dB \longrightarrow SNR_{Q,n}\big|_{dB} = f_P\big|_{dB} + 4{,}77 + 6{,}02\,n > 90\,dB$$

$$-3 + 4{,}77 + 6{,}02\,n > 90 \longrightarrow n > \frac{90-4{,}77+3}{6{,}02} \approx 14{,}6 \rightarrow n = 15\,bit$$

d): Δ, $P_Q \rightarrow \quad P_Q = \frac{\Delta^2}{12}$

$$\Delta = \frac{V_{pp}}{M} = \frac{2A}{2^n} = 2^{-14}\cdot A =$$

$$P_Q = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-28}}{12}A^2$$

e) BIT-RATE risultante : $r_B = f_S \cdot n = 40\,KHz \cdot 15 = 600\ kbit/s$