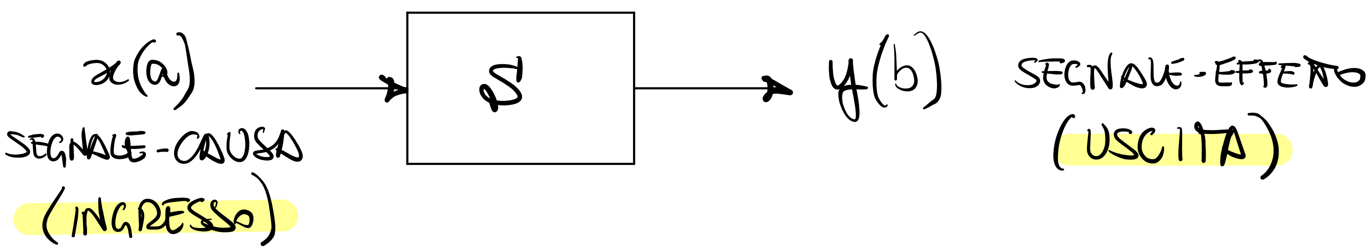
SISTEMI

SISTEMA: FENOMENO caratterizzato da una RELAZIONE DI CAUSA → EFFETTO

SISTEMI per l'ELABORAZIONE dei SEGNALI

↳ CAUSA ed EFFETTO sono SEGNALI



Definizione FORMALE: $S[\cdot]$ RELAZIONE INGRESSO-USCITA

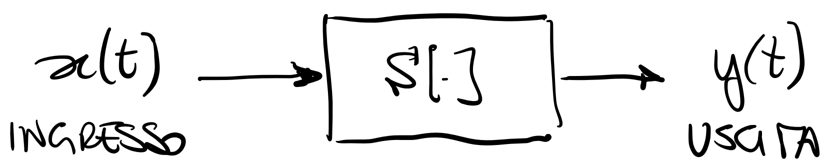
SISTEMA: $S[\cdot]$ t.c.: $y(b) = S[x(a)]$ $a \in A$; $b \in B$

Se $x(a)$ e $y(b)$ sono SEGNALI CONTINUI (A, B INSIEMI CONTINUI)

Allora $S[\cdot]$: $y(b) = S[x(a)]$ è un SISTEMA CONTINUO

Se $a, b = t$ (TEMPO), $t \in \mathbb{R}$ → SISTEMI TEMPO-CONTINUI

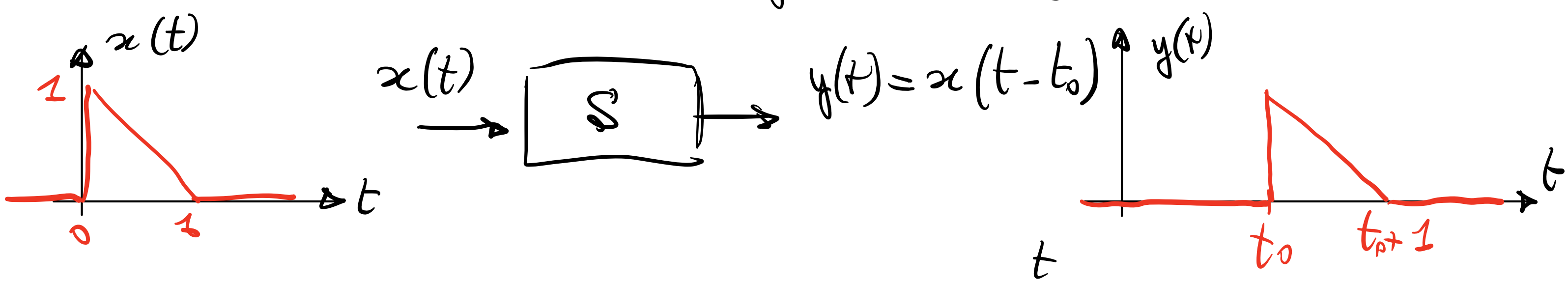
SISTEMI TEMPO-CONTINUI



SISTEMA: $y(t) = S[x(t)]$, $t \in \mathbb{R}$

ESEMPI :

★ RITARDATORE : $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = x(t-t_0)$



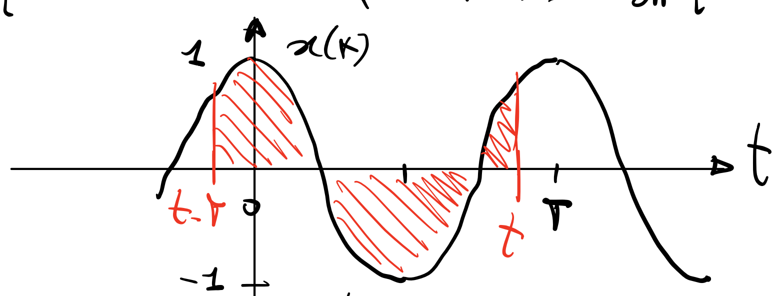
★ INTEGRATORE DEFINITO : $y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$

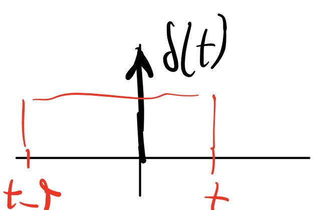
Es: calcoliamo l'uscita per i seguenti segnali in INGRESSO :

$$x_1(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad ; \quad x_2(t) = \delta(t)$$

1) $y_1(t) = S[x_1(t)] = \int_{t-T}^{t} x_1(\tau)\, d\tau = \int_{t-T}^{t} \cos\left(2\pi \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \frac{T}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi \frac{\tau}{T}\right)\right]_{t-T}^{t} =$

$$= \frac{T}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - \sin\left(2\pi\frac{t-T}{T}\right)\right] = \frac{T}{2\pi}\left[\cancel{\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} - \cancel{\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 2\pi\frac{T}{T}\right)}\right] = 0$$

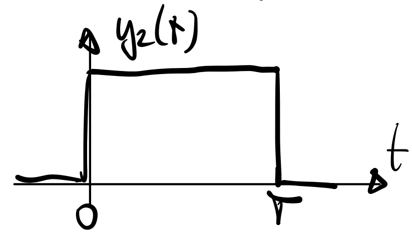




2) $y_2(t) = S[x_2(t)] = \int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 1 & t-T<0 \text{ e } t>0 \\ 0 & \end{cases}$

$t-T<0 \rightarrow t<T \rightarrow 0<t<T$

$= \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$



PROPRIETÀ dei SISTEMI TEMPO-CONTINUI

NON DISPERSIVITÀ :

Un sistema S è detto NON DISPERSIVO sse l'uscita all'istante t DIPENDE dall'INGRESSO SOLAMENTE all'istante t (DIPENDE dall'INGRESSO "PRESENTE").

$S[\cdot]$ è NON DISPERSIVO sse $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(t))$

ESEMPI:

AMPLIFICATORE IDEALE: $S: \; y(t) = Ax(t)$

ES: $y(t) = 5x^2(t)\,\mathrm{rect}(t/2) \rightarrow f(t, x(t)) \rightarrow$ NON DISPERSIVO

$\boxed{\text{CAUSALITÀ}}$

$S[\cdot]$ è CAUSALE sse l'USCITA DIPENDE al più dal PRESENTE e dal PASSATO dell'INGRESSO ($\rightarrow$ NON DIPENDE dal FUTURO)

Formalmente:

$S[\cdot]$ è CAUSALE sse $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \leq t)$

ESEMPIO: $S[\cdot]$ t.c. $y(t) = 2x^2(\underbrace{\tfrac{t}{2} - 1}_{\tau}) \rightarrow S[\,]$ è CAUSALE ?

$\tau = \boxed{\frac{t}{2} - 1 \leq t}$? $\rightarrow -1 \leq \frac{t}{2} \rightarrow \boxed{t \geq -2}$ per $t \geq -2$ CAUSALE

$t < -2$ NON CAUSALE

STABILITÀ "BOUNDED-INPUT, BOUNDED OUTPUT" (BIBO)

↳ "ad un INGRESSO LIMITATO CORRISPONDE SEMPRE un'USCITA LIMITATA"

Dato $S[\cdot]: \; y(t) = S[x(t)]$, $S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) SSE:

$\forall \; x(t)$ t.c. $|x(t)| \leq k_x$ FINITO $\rightarrow |y(t)| \leq k_y$ FINITO, $\forall t \in \mathbb{R}$

Es: AMPLIF. IDEALE: $y(t) = A\,x(t)$

Ip: $|x(t)| \leq k_x \rightarrow |y(t)| = |A\,x(t)| = |A| \cdot |x(t)| \leq |A| \cdot k_x = k_y$ FINITO $\rightarrow$ STABILE

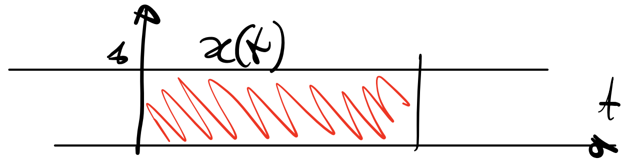
$|x(t)| \leq k_x$

Es: INTEGRATORE INDEFINITO: $y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$

Ip: $x(t) = 1$ (LIMITATO) $\rightarrow y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t$

NON STABILE

per $t \to \infty \to y(t) \to \infty$



LINEARITÀ

Un SISTEMA $S[\cdot]$ è LINEARE sse è OMOGENEO e ADDITIVO

OMOGENEITÀ: $S[\cdot]$ è OMOGENEO sse:

dato: $y(t) = S[x(t)] \longrightarrow S[a\,x(t)] = a\,S[x(t)] = a\,y(t), \ \forall a \in \mathbb{R}$

ADDITIVITÀ: $S[\cdot]$ è ADDITIVO sse:

dati: $\begin{cases} y_1(t) = S[x_1(t)] \\ y_2(t) = S[x_2(t)] \end{cases} \rightarrow S[x_1(t) + x_2(t)] = S[x_1(t)] + S[x_2(t)] =$

$= y_1(t) + y_2(t), \ \forall x_1(t), x_2(t)$

Per i SISTEMI LINEARI vale il:

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

L'EFFETTO (o RISPOSTA) di un SISTEMA a una COMBINAZIONE LINEARE (SOMMA PESATA) di INGRESSI è UGUALE alla STESSA COMB. LINEARE (stessi PESI) delle RISPOSTE del SISTEMA ad OGNI SINGOLO INGRESSO

Dato: $x(t) = \sum_1^N a_i\, x_i(t) \rightarrow y(t) = S[x(t)] = \sum_1^N a_i\, S[x_i(t)] = \sum_1^N a_i\, y_i(t)$

dove: $y_i(t) = S[x_i(t)]$

Es: $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$ è LINEARE?

$x(t) = \sum_1^N a_i\, x_i(t) \rightarrow y(t) = S[x(t)] = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{t-T}^{t} \sum_1^N a_i\, x_i(\tau)\, d\tau =$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \underbrace{\int_{t-T}^{t} x_i(\tau)\,d\tau}_{y_i(t) = S[x_i(t)]} = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y_i(t) \longrightarrow \text{LINEARE! } \checkmark$$

Es: $y(t) = S[x(t)] = 2x(t-1) + 1$

OMOGENEO? $\quad \underline{S[a\,x(t)]} = a\,y(t) = \underline{a\,S[x(t)]}$

$$\to S[a\,x(t)] = 2[a\,x(t-1)] + 1 = 2a\,x(t-1) + \underline{1}$$

$$\to a\,S[x(t)] = a[2x(t-1) + 1] = 2a\,x(t-1) + \underline{a}$$

$\neq$ NON OMOGENEO $\downarrow$ NON LINEARE

Es: $y(t) = S[x(t)] = |x(t)|$ è LINEARE? (COMPITO)

TEMPO - INVARIANZA

$S[\cdot]$ è TEMPO-INVARIANTE SSE la RELAZIONE INGRESSO/USCITA "NON VARIA" nel TEMPO

Dato $S[\cdot]$: $\quad y(t) = S[x(t)] \longrightarrow y(t-t_0) = S[x(t-t_0)], \ \forall t_0, t \in \mathbb{R}$

Es: RITARDATORE: $y(t) = x(t-D)$ è tempo-invariante?

USCITA RITARDATA: $y(t-t_0) = x(t-t_0-D)$

USCITA dell'INGR RITARDATO: $S[x(t-t_0)] = x(t-t_0-D)$

$=$? $\to$ TEMPO-INVARIANZA

Es: "FINESTRATORE": $y(t) = x(t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\to y(t-t_0) = x(t-t_0)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

$$\to S[x(t-t_0)] = x(t-t_0)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$\neq$ TEMPO-VARIANTE

SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI (LTI)

$$y(t) = S[x(t)]$$

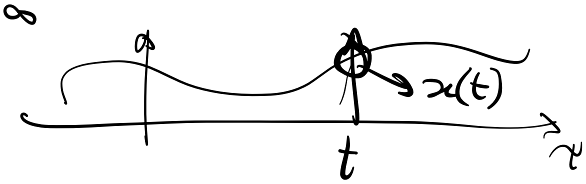
$$x(t) \longrightarrow \boxed{S[\cdot]} \longrightarrow y(t)$$

Posso esprimere $x(t)$ come:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Prop. campionamento di $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$



$$y(t) = S[x(t)] = S\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{PESI (COEFFICIENTI)}}\,\underbrace{\delta(t-\tau)}_{\text{FUNZIONI}}\,d\tau\Big] =$$

Se $S[\cdot]$ è LINEARE:

$$y(t) = S\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\underbrace{S[\delta(t-\tau)]}_{\text{RISPOSTA all'IMPULSO di } S[\cdot]}\,d\tau$$

dato $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)]$, DEFINIAMO: $h(t) = S[\delta(t)]$ la RISPOSTA all'IMPULSO di $S[\cdot]$

Se $S[\cdot]$ è TEMPO-INVARIANTE:

se $h(t) = S[\delta(t)] \longrightarrow h(t-t_0) = S[\delta(t-t_0)]$

Allora:

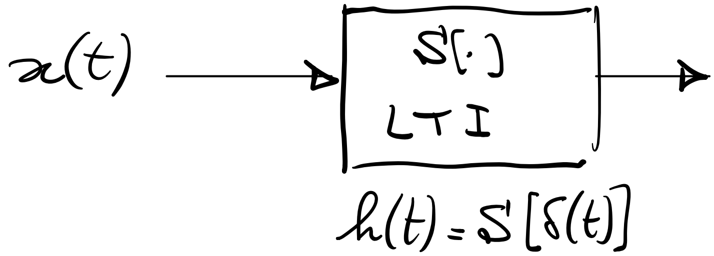
$$\boxed{y(t) = S[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau}$$

CONVOLUZIONE (PRODOTTO di CONVOLUZIONE)

Date $x(t), h(t)$:

$$c(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

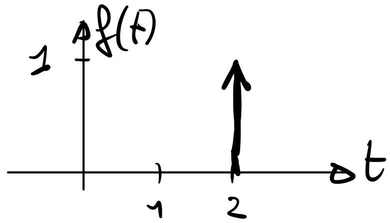
Per SISTEMI LTI: se conosco $h(t) = S[\delta(t)] \longrightarrow$ SO TUTTO di $S[\cdot]$

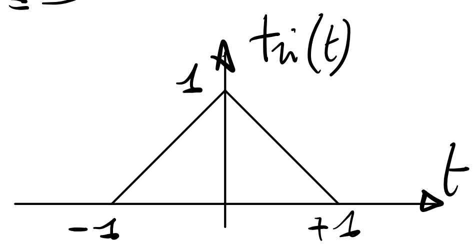


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

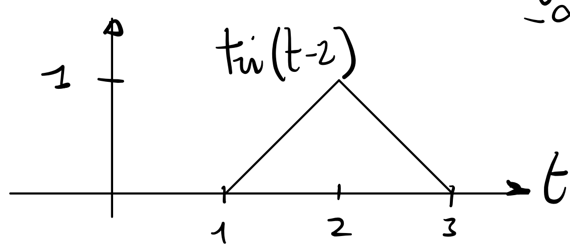
ESEMPI di CALCOLO della CONVOLUZIONE :

Date : $f(t) = \delta(t-2)$; $g(t) = \text{tri}(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$





$$c(t) = f(t) * g(t) = \delta(t-2) * \text{tri}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(\tau-2)}_{\text{IMPULSO in } \tau=2} \text{tri}(t-\tau)\, d\tau = \text{tri}(t-2)$$

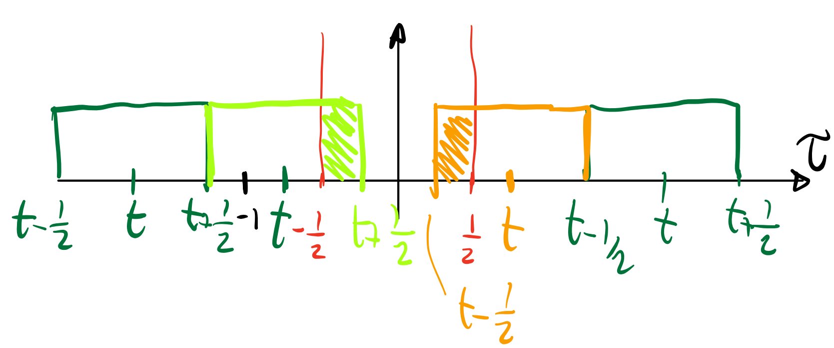


$$\boxed{\text{In GENERALE: } \quad f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)}$$

Calcoliamo : $c(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

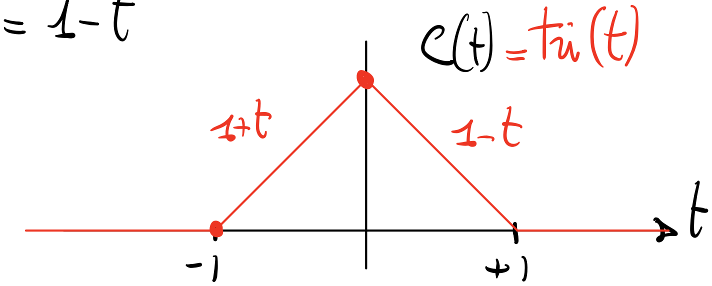
$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(\tau) \cdot \text{rect}(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \text{rect}(t-\tau)\, d\tau$$



$$c(t) = \begin{cases} t < -1 \longrightarrow c(t) = 0 \\ t > +1 \longrightarrow c(t) = 0 \\ -1 \le t \le 0 \longrightarrow c(t) = t + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = t+1 \end{cases}$$

$0 \le t \le 1 \rightarrow c(t) = \frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) = 1 - t$

$$\boxed{rect(t) * rect(t) = tri(t)}$$



Calcolare la convoluzione di: $f(t) = \cos(2\pi t)$ con $g(t) = rect(t)$

$$c(t) = \cos(2\pi t) * rect(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\tau)\, \underbrace{rect(t-\tau)}\, d\tau =$$

$=1$ per $-\frac{1}{2} \le t - \tau \le \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} - t \le -\tau \le \frac{1}{2} - t$

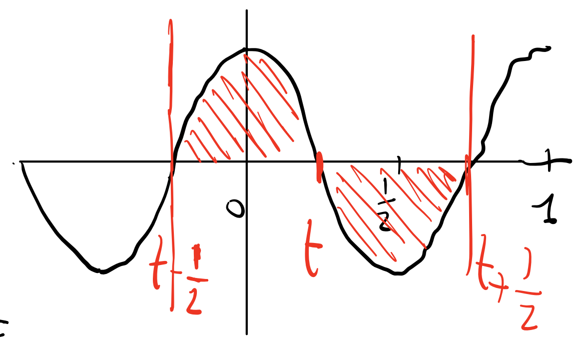
$\downarrow$

$t - \frac{1}{2} \le \tau \le t + \frac{1}{2}$

$$= \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \cos(2\pi\tau) \cdot \cancel{1}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\Big[\sin 2\pi\tau\Big]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\sin\left(2\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left[2\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sin(\cancel{2\pi t} + \pi) - \sin[\cancel{2\pi t} - \pi]\right] = 0$$



PROCEDURA di CALCOLO della CONVOLUZIONE

Dati $a(t)$, $b(t)$, quanto vale:

$$c(t_0) = a(t) * b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{a(\tau)\, b(t_0 - \tau)}\, d\tau \text{, per } t = t_0 \text{ ?}$$

1) Considero: $a(t)$ e $b(t_0 - t)$ → RIBALTATA e TRASLATA di t_0

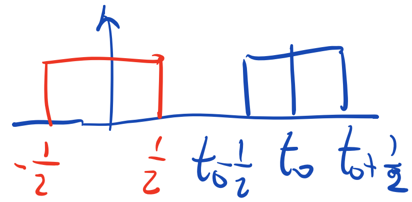
2) Calcolo il PRODOTTO: $a(t) \cdot b(t_0 - t) = p(t)$

3) $c(t = t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\, d\tau$

ESEMPIO: $a(t) = \mathrm{rect}(t)$, $b(t) = \mathrm{rect}(t)$

Per $t = t_0$:

$b(t_0 - t) = \mathrm{rect}(t_0 - t)$



2) $p(t) = \mathrm{rect}(t) \cdot \mathrm{rect}(t_0 - t)$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\, d\tau = c(t = t_0)$

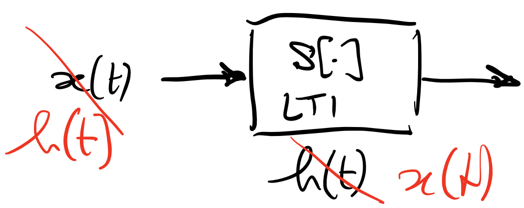
PROPRIETÀ della CONVOLUZIONE

PROPRIETÀ COMMUTATIVA:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

DIM: $\displaystyle f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \left[\begin{array}{l}\text{sostituz.} \\ x = t - \tau \rightarrow \tau = t - x,\ d\tau = -dx\end{array}\right] =$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-x)\, g(x)\, (-dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(t-x)\, dx = g(t) * f(t) \quad V$$



$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * g(t) * h(t)$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA (della somma):

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

DURATA della CONVOLUZIONE

Dati: $f(t)$ di DURATA T_F
$g(t)$ di DURATA T_G $\rightarrow$ $c(t) = f(t) * g(t)$ ha DURATA $T_F + T_G$

PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI

Dato un SISTEMA $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)]$, se $S[\cdot]$ è LTI

Allora, detta $h(t) = S[\delta(t)]$ RISPOSTA all' IMPULSO

Abbiamo che: $y(t) = S[x(t)] = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

CAUSALITÀ:

$$y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \leq t)$$

$$\boxed{S[\cdot] \text{ è CAUSALE SSE } h(t)=0 \quad \forall t<0}$$

In questo caso: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\cancel{+\infty}\ t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

STABILITÀ (BIBO)

Dato $S[\cdot]$ LTI; $S[\cdot]$ è STABILE SSE:

dato $|x(t)| \leq M_x$ FINITO $\rightarrow$ $|y(t)| \leq M_y$ FINITO, $\forall t$

Consideriamo $|y(t)|$:

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq M_x}\,d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot M_x\,d\tau = M_x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau} \leq M_y \ \text{FINITO}$$

$S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) SSE $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau$ è FINITO

$\boxed{\text{sse } h(t) \text{ è INTEGRABILE in VALORE ASSOLUTO}}$

SISTEMI DISCRETI (TEMPO-DISCRETI)

DEFINIZIONE: SISTEMA in cui INGRESSO e USCITA sono SEGNALI DISCRETI

$$x(n) \longrightarrow \boxed{S[\cdot]} \longrightarrow y(n) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$S[\cdot]: \quad y(n) = S[x(n)] \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ESEMPI:

* RITARDATORE (DISCRETO): $S[\cdot]: \ y(n) = S[x(n)] = x(n-5)$

* INTEGRATORE (DISCRETO):

$$S[\cdot]: \ y(n) = S[x(n)] = \sum_{i=0}^{N} x(n-i) \ , \quad n, N \in \mathbb{Z}$$

es: $N=4 \rightarrow y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$

PROPRIETÀ dei SISTEMI DISCRETI

CAUSALITÀ

Dato $S[\cdot]: \ y(n) = S[x(n)] = f(n, x(m), m \leq n) \qquad m, n \in \mathbb{Z}$

STABILITÀ (BIBO):

Dato $S[\cdot]: \ y(n) = S[x(n)]$ è STABILE (BIBO) SSE:

$$|x(n)| \leq k_x \text{ FINITO} \longrightarrow |y(n)| \leq k_y \text{ FINITO} \ , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

LINEARITÀ (OMOGENEITÀ + ADDITIVITÀ)

OMOGENEITÀ:

Dato: $y(n) = S[x(n)]$ OMOGENEO sse $S[a x(n)] = a \cdot S[x(n)] = a \cdot y(n), \begin{cases} \forall a \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ADDITIVITÀ:

Dati: $y_1(t) = S[x_1(t)]$
$y_2(t) = S[x_2(t)]$

ADDITIVO sse: $S[x_1(t) + x_2(t)] = S[x_1(t)] + S[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$

LINEARITÀ $\equiv$ PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI:

Dati N segnali $x_i(n)$, $i = 1 .. N$ $\longrightarrow$ $y_i(n) = S[x_i(n)]$

Dato: $x(n) = \sum_{1}^{N} a_i x_i(n)$

Allora: $y(n) = S[x(n)] = \sum_{1}^{N} a_i S[x_i(n)] = \sum_{1}^{N} a_i y_i(n)$

ESEMPIO: verifica LINEARITÀ:

Dato $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)] = 1 + x(n-2)$: è LINEARE?

OMOGENEITÀ:

$S[a \cdot x(n)] = 1 + a x(n-2)$ $\neq$ per $a \neq 1$

$a\, S[x(n)] = a[1 + x(n-2)] = a + a x(n-2)$

NON OMOGENEO $\downarrow$ NON LINEARE.

ESEMPIO: $y(n) = S[x(n)] = \sum_{-2}^{+2} x(n-i)$ $\rightarrow$ è LINEARE?

Verifico la LINEARITÀ con il P.S.E.:

$x(n) = \sum_{1}^{N} a_j x_j(n)$

$y(n) = S[x(n)] = \sum_{-2}^{+2} x(n-i) = \sum_{-2}^{+2} \left[\sum_{1}^{N} a_j x_j(n-i) \right] =$

$= \sum_{1}^{N} \left[\sum_{-2}^{+2} a_j x_j(n-i) \right] = \sum_{1}^{N} a_j \underbrace{\sum_{-2}^{+2} x_j(n-i)}_{y_j = S[x_j]} = \sum_{1}^{N} a_j y_j(n)$ $\checkmark$

$\rightarrow$ LINEARE.

TEMPO-INVARIANZA

Dato: $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)]$ è TEMPO-INVARIANTE SSE:

$$y(n) = S[x(n)] \longrightarrow y(n-n_0) = S[x(n-n_0)], \ \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

Esempio: $S[\cdot]$: $y(n) = S[x(n)] = x(n) \cdot u(n)$ è T-INVARIANTE?

$$\begin{matrix} x(n) \\ y(n) \\ x(n-n_0) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \begin{matrix} x(n)\,u(n) \\ y(n)\,u(n) \\ x(n-n_0)\,u(n) \end{matrix}$$

$y(n) = x(n) \cdot u(n)$

$\rightarrow y(n-n_0) = x(n-n_0) \cdot \underline{u(n-n_0)}$

$\rightarrow S[x(n-n_0)] = x(n-n_0) \cdot \underline{u(n)}$

$\neq$ NON T. INV.!

SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI (LTI) DISCRETI

Consideriamo l'ingresso $\forall x(n)$, che posso scrivere:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S[\cdot] \\ LTI \end{matrix}} \longrightarrow y(n)$$

$$\boxed{x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \underbrace{\delta(n-i)}_{\text{Impulso in } n=i}}$$

COMB. LINEARE di IMPULSI, COEFF. $x(i)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \emptyset & n \neq 0 \end{cases}$$

L'USCITA: $y(n) = S[x(n)] = S\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(i)}_{\text{COEFF.}} \underbrace{\delta(n-i)}_{\text{FUNZ.}}\right] =$

ESSENDO $S[\cdot]$ LINEARE:

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \cdot \underbrace{S[\delta(n-i)]}$$

DEFINIAMO: RISPOSTA all'IMPULSO (DISCRETO) di S: $h(n) := S[\delta(n)]$

ESSENDO $S[\cdot]$ TEMPO-INVARIANTE:

se: $h(n) = S[\delta(n)] \longrightarrow h(n-n_0) = S[\delta(n-n_0)], \ \forall n_0 \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, h(n-i)} \ ; \quad h(n) = S[\delta(n)]$$

Definisco CONVOLUZIONE DISCRETA:

CONVOLUZIONE DISCRETA:

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i) \cdot b(n-i)$$

$x(n) \longrightarrow$ $\boxed{S[\cdot]\ \text{LTI} \quad h(n)}$ $\longrightarrow$ $y(n) = x(n) * h(n)$

dove: $h(n) = S[\delta(n)]$

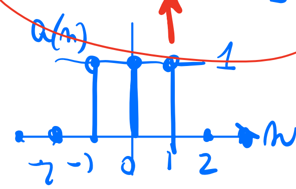
CALCOLO CONVOLUZIONE DISCRETA

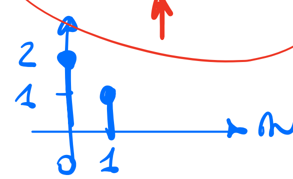
$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(i) \cdot b(n-i)$$

1) considero: $a(i)$; $b(n-i) \longrightarrow$ RIBALTATA e TRASLATA di: n
2) Calcolo il PRODOTTO: $p(i) = a(i) \cdot b(n-i)$
3) $\longrightarrow c(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(i)$ (AREA $\longrightarrow$ SOMMA dei CAMPIONI)

Esempio:

calcolare $a(n) * b(n)$, dove $a_n = \{1, 1, 1\}$ e $b_n = \{2, 1\}$





$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a(i) \cdot b(n-i) =$$

$$= \sum_{i=-1}^{+1} \cancel{1} \cdot b(n-i) = \underbrace{b(n+1) + b(n) + b(n-1)}_{0 \leq n \leq 1}$$

$n = -10 \longrightarrow c(n=-10) = 0$

$n \leq -2 \longrightarrow c(n) = 0$

$n = -1 \longrightarrow c(-1) = b(0) + \cancel{b(-1)} + \cancel{b(-2)} = 2$

$n = 0 \longrightarrow c(0) = b(1) + b(0) + \cancel{b(-1)} = 1 + 2 = 3$

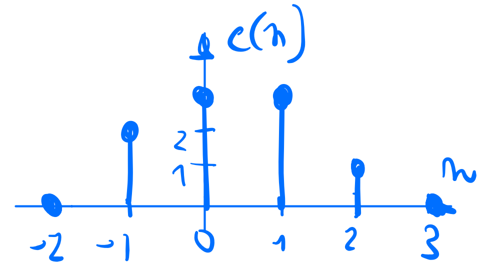
$n = 1 \longrightarrow c(1) = \cancel{b(2)} + b(1) + b(0) = 1 + 2 = 3$

$n = 2 \longrightarrow c(2) = \cancel{b(3)} + \cancel{b(2)} + b(1) = 1$

$n = 3 \longrightarrow c(3) = \cancel{b(4)} + \cancel{b(3)} + \cancel{b(2)} = 0$

$n \geq 3 \longrightarrow c(n \geq 3) = 0$

$$\boxed{c(n) = \{2,\ \underset{\uparrow}{3},\ 3,\ 1\}}$$



Date : $s(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$, calcolare : $\boxed{s(n) * u(n)}$

$$c(n) = s(n) * u(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(i)\, u(n-i) =$$

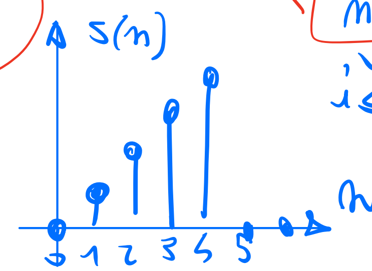
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$\boxed{u(n-i) = 1}$, $n - i \geq 0$

$\boxed{n \geq i}$

$i \leq n$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(i)\, u(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{n} s(i) \cdot 1 = \sum_{i=-\infty}^{n} s(i)$$



$$\boxed{c(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} s(i)}$$

Per $n \leq 0 \longrightarrow c(n) = 0$

$n = 1 \longrightarrow c(1) = s(1) = 1$

$n = 2 \longrightarrow c(2) = s(1) + s(2) = 1 + 2 = 3$

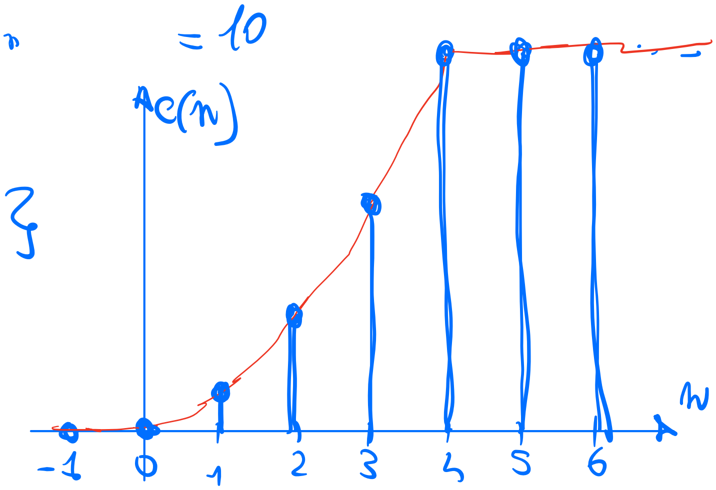
$n = 3 \longrightarrow c(3) = \sum_{i=-\infty}^{3} s(i) = 1 + 2 + 3 = 6$

$n = 4 \longrightarrow c(4) = \sum^{4} s(i) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$n = 5 \longrightarrow c(5) = \sum_{i=-\infty}^{5} s(i) = \quad " \quad = 10$

$n \geq 4 \longrightarrow c(n) = 10$

$$c(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 6, 10, 10, \dots\}$$



COMPITO:

calcolare $\mathrm{rect}\left(\frac{n}{3}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{n}{5}\right)$

$\mathrm{rect}\left(\frac{n}{3}\right) \rightarrow \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$

$\mathrm{rect}\left(\frac{n}{5}\right) \rightarrow \{1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}$

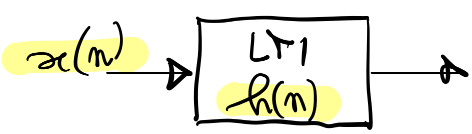
$$\left[\; c(n) = \{1, 2, 3, \underset{\uparrow}{3}, 3, 2, 1\} \;\right]$$

PROPRIETÀ delle CONVOLUZIONE DISCRETA

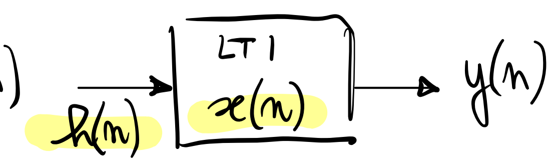
1) COMMUTATIVA: $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$

DIM: $f(n) * g(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\, g(n-i) = \left\{ \begin{array}{l} m = n-i \\ \rightarrow i = n-m \end{array} \right\} =$

$$= \sum_{m=+\infty}^{-\infty} f(n-m)\, g(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m)\, f(n-m) = g(n) * f(n) \checkmark$$



$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$



2) ASSOCIATIVA:

$$f(n) * [g(n) * h(n)] = [f(n) * g(n)] * h(n) = f(n) * g(n) * h(n)$$

3) DISTRIBUTIVA delle SOMMA:

$$f(n) * [g(n) + h(n)] = f(n) * g(n) + f(n) * h(n)$$

4) DURATA delle CONVOLUZIONE DISCRETA:

Se: $f(n)$ ha DURATA $D_f \in \mathbb{Z}$, $g(n)$ ha DURATA $D_g \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $c(f) = f(n) * g(n)$ ha DURATA $D_f + D_g - 1$

5) CONVOLUZIONE con $\delta(n - n_0)$:

$$f(n) * \delta(n) = f(n) \longrightarrow f(n) * \delta(n-n_0) = f(n-n_0)$$

$$\underline{\text{DIM}}: \; f(n) * \delta(n-n_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, f(i)\, \underbrace{\delta(n-n_0-i)}_{=1 \text{ per } i = n-n_0} = f(n-n_0) \quad \checkmark$$

PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI DISCRETI

$n \in \mathbb{Z}$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S[\cdot]\ \text{LTI} \\ h(n) \end{matrix}} \longrightarrow \quad y(n) = x(n) * h(n) \; ; \quad h(n) = S[\delta(n)]$$

CAUSALITÀ:

$$\delta(n) \longrightarrow \overset{S[\cdot]}{\boxed{\text{LTI}}} \longrightarrow h(n)$$

$S[\cdot]$ è CAUSALE sse $h(n) = 0$ per $\forall n < 0$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{-\infty}^{\cancel{\infty}\; n} {}_i \, x(i)\, \underset{\downarrow}{h(n-i)} = \sum_{0}^{\infty} {}_i \, h(i)\, x(n-i)$$

$h(n-i) = 0$ per $n - i < 0 \rightarrow i > n$

STABILITÀ (BIBO)

$S[\cdot]$ è STABILE (BIBO) sse dato $|x(n)| \leq M_x$ FINITO $\rightarrow |y(n)| \leq M_y$ FINITO $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{|y(n)|}_{\leq M_y} = |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, x(i) h(n-i) \right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, |x(i)\, h(n-i)| =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, |x(i)| \cdot |h(n-i)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, M_x \, |h(n-i)| = \underbrace{M_x \sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, |h(n-i)|}_{} \leq M_y \text{ FINITO}$$

$\rightarrow$ $S[\cdot]$ è STABILE sse : $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} {}_i \, |h(i)| = K$ FINITO

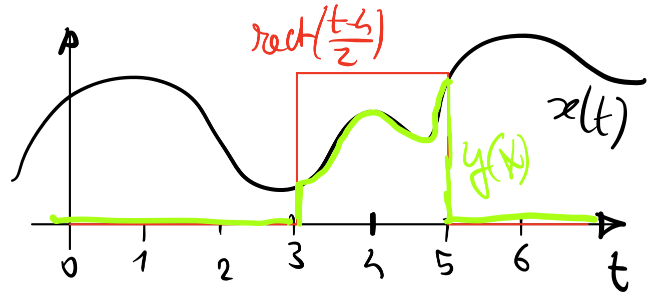
ESERCIZI di RIEPILOGO

Dato il sistema $S[\cdot]$: $y(t) = S[x(t)] = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) = \begin{cases} x(t) \cdot 1 & 3 \leq t \leq 5 \\ x(t) \cdot 0 & \text{altrove} \end{cases}$

a) NON DISPERSIVO ?

$$y(t) = \underbrace{f(t, x(t))} = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

NON DISPERSIVO



b) TEMPO-INVARIANTE ? $y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]\ \forall t_0$

$$y(t-t_0):\quad y(t) = \underbrace{x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)} \xrightarrow{\text{TRASL.}} y(t-t_0) = x(t-t_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0-4}{2}\right)$$

$$S[x(t-t_0)] = x(t-t_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

$\neq$ NON T.I.

c) CAUSALE ?

$S[\cdot]$ è CAUSALE sse $y(t) = S[x(t)] = f(t, x(\tau), \tau \le t)$

$$y(t) = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) = f(x(\tau), \tau = t \le t \ ?$$

CAUSALE

Dato S LTI con: $h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-2)$

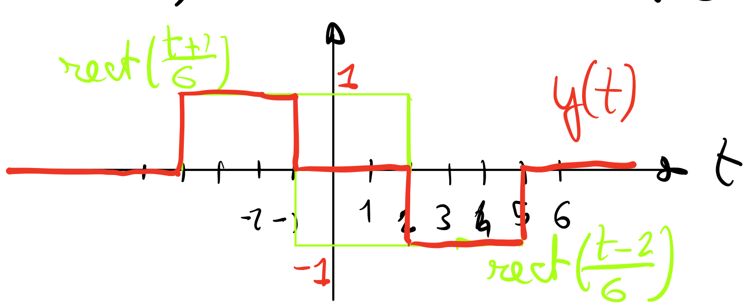
$$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$$

Dato: $x(t) = \mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{6}\right)$; $y(t) \overset{?}{\rightarrow} = x(t) * h(t)$

$$x(t) = \mathrm{rect}^{\cancel{2}}\left(\frac{t}{6}\right) = \begin{cases} 1 & -3 \le t \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y(t) = x(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-2)] = x(t) * \delta(t+1) - x(t) * \delta(t-2) =$$

$$= x(t+1) - x(t-2) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{6}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{6}\right)$$

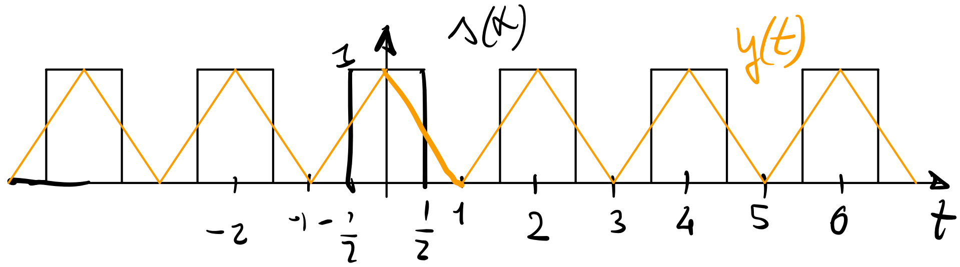


$$s(t) \to \boxed{h(t)_{LTI}} \to y(t) \ ?$$

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \, \mathrm{rect}(t-2k)$$

$$h(t) = \mathrm{rect}(t)$$

Determinare $y(t)$



$$y(t) = s(t) * h(t) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \, \mathrm{rect}(t-2k)\right] * \mathrm{rect}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \, \underbrace{\mathrm{rect}(t-2k) * \mathrm{rect}(t)}_{\mathrm{rect}(t) * \delta(t-2k)} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \, \mathrm{rect}(t) * \delta(t-2k) * \mathrm{rect}(t) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \, \mathrm{tri}(t) * \delta(t-2k) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \, \mathrm{tri}(t-2k)$$

$$S[\cdot]: \quad y(t) = \int_{t-10}^{t-5} x(\tau+2)\, d\tau + \sin(2\pi t)$$

CAUSALE: $y(t) = f(t, x(\tau), \tau \leq t)$

$$y(t) = \int_{t-10}^{t-5} x(\tau+2)\, d\tau + \sin(2\pi t) = \begin{pmatrix} \tau' = \tau+2 \\ d\tau' = d\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{t-8}^{t-3} x(\tau')\, d\tau' + \sin(2\pi t) =$$

$t-8 \leq \tau \leq t-3 \rightarrow \tau \leq t$? sì!

CAUSALE

T. INV: $y(t) = S[x(t)] \longrightarrow y(t-t_0) = S[x(t-t_0)], \ \forall t_0$

$$y(t-t_0) = \int_{t-t_0-10}^{t-t_0-5} x(\tau+2)\, d\tau + \sin(2\pi(t-t_0)) = \int_{t-10}^{t-5} x(\tau-t_0+2)\, d\tau + \sin(2\pi(t-t_0))$$

$$S[x(t-t_0)] = \int_{t-10}^{t-5} x(\tau-t_0+2)\, d\tau + \sin(2\pi t)$$

$\neq$ NON T. INV.

Dato il sistema $S[\cdot]$:

$$y(t) = S[x(t)] = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau - 1)\, d\tau$$

CAUSALE sse: $y(t) = f\big(x(\tau \leq t), t\big) = 1 + \int_{-2t}^{+2t} x(\tau - 1)\, d\tau$

$-2t \leq \tau - 1 \leq 2t \rightarrow -2t + 1 \leq \tau \leq 2t + 1$

$\leq t \,?$

$\rightarrow 2t + 1 \leq t \rightarrow t \leq -1$

$t > -1 \longrightarrow$ NON CAUSALE

$-2t + 1 \leq t$

$-3t + 1 \leq 0 \rightarrow 3t \geq 1 \rightarrow t \geq \frac{1}{3} \Rightarrow t < \frac{1}{3}$ NON CAUSALE

LINEARE ?

OMOGENEITÀ : $A y(t) = S[A x(t)]$

$$A y(t) = A + A \int_{-2t}^{2t} x(\tau - 1)\, d\tau$$

$\neq$ NON OMOGENEO $\rightarrow$ NON LINEARE

$$S[A x(t)] = 1 + \int_{-2t}^{+2t} A x(\tau - 1)\, d\tau = 1 + A \int_{-2t}^{+2t} x(\tau - 1)\, d\tau$$