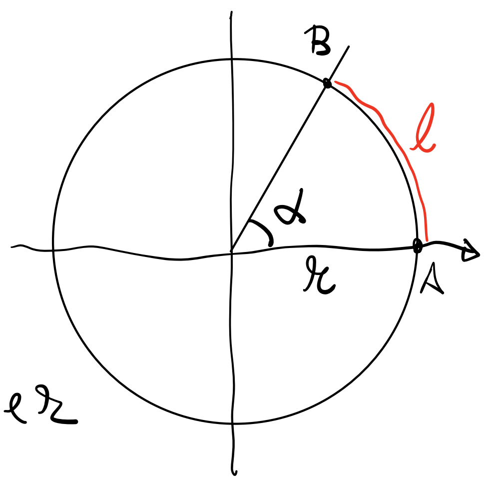
Pagina WEB: pedersini.di.unimi.it/ES/

PROGRAMMA del CORSO:

- PRELIMINARI: N. COMPLESSI, RADIANTI
- SEGNALI nel dominio dei TEMPI
- SISTEMI nel dominio dei TEMPI
- SEGNALI e SISTEMI nel dominio delle FREQUENZE → S.S.F Trasf. FOURIER
  ↳ Sv. SERIE di FOURIER / Trasf. di FOURIER
- CONVERSIONE ANALOGICO → DIGITALE → campionamento → quantizzazione
- SEGNALI e SISTEMI DIGITALI nelle FREQUENZE
  ↳ DTFT, DFT, Z
- PROGETTO di SISTEMI (FILTRI) DIGITALI

ANGOLI in RADIANTI

DEF: data CRF raggio r (arbitrario)
considero ANGOLO al CENTRO α che
INDIVIDUA un ARCO $\widehat{AB}$ di lungh. l



→ $\boxed{\alpha_{RAD} = \dfrac{l}{r}}$ RAPPORTO tra lunghezze di l e r

↳ NON dipende da r

↳ numero ADIMENSIONALE

Es: ANGOLO GIRO (360°)

$$\alpha_{RAD} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi$$

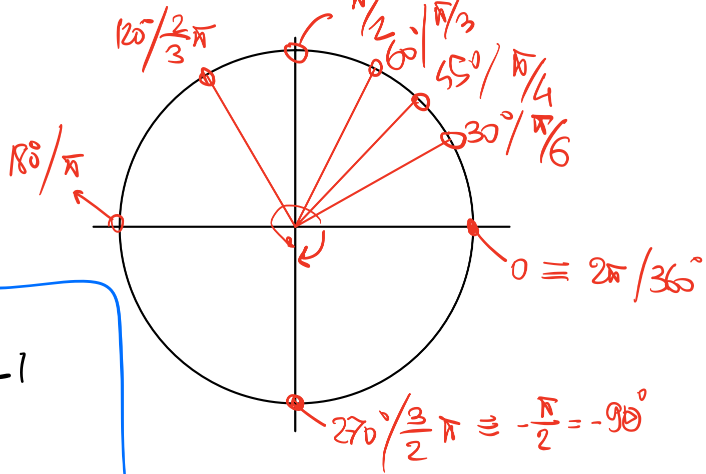
Angolo PIATTO (180°)

$$\alpha_{RAD} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

$\alpha_{RAD} : \pi = \alpha^\circ : 180$ →

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{RAD} &= \alpha^\circ \frac{\pi}{180} \\ \alpha^\circ &= \alpha_{RAD} \cdot \frac{180}{\pi} \end{aligned}}$$

ANGOLI NOTEVOLI in RADIANTI:



CICLICITÀ degli ANGOLI

$$\alpha^\circ = \alpha^\circ + k \cdot 360$$

$$\alpha_{RAD} = \alpha_{RAD} + k \cdot 2\pi$$

NUMERI COMPLESSI

NUMERI COMPLESSI (CAMPO: $\mathbb{C}$): la "CHIUSURA ALGEBRICA" di $\mathbb{R}$

→ Un POLINOMIO di GRADO N a COEFF. COMPLESSI ha SEMPRE N SOLUZIONI (o RADICI) in $\mathbb{C}$

$$a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

ha SEMPRE N SOLUZIONI (N VALORI di x che SODDISFANO l'EQUAZIONE) (AZZERANO il POLINOMIO)

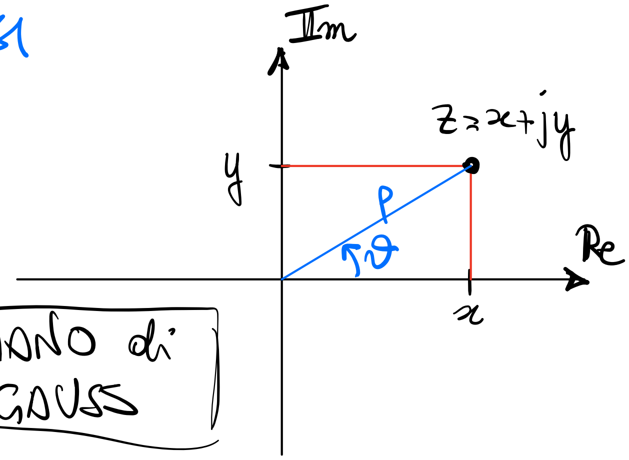
Per definire $\mathbb{C}$ introduco l'UNITÀ IMMAGINARIA

UNITÀ IMMAGINARIA: $\boxed{j = \sqrt{-1}} \notin \mathbb{R}$

NUMERO COMPLESSO: SOMMA di DUE COMPONENTI: $\begin{cases} \text{- Comp. REALE} \\ \text{- Comp. IMMAGINARIA} \end{cases}$

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow z = \underbrace{x}_{\text{COMP. REALE}} + \underbrace{jy}_{\text{Comp. IMMAGINARIA}}, \quad \begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ j = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE di N. COMPLESSI



$z = x + jy \; : \; \langle x, y \rangle$

$x \in \mathbb{R} \leftarrow$ ASCISSA

$y \in \mathbb{R} \leftarrow$ ORDINATA

PIANO di GAUSS

$z = x + jy \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \longrightarrow$ COORDINATE RETTANGOLARI

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA di $z \in \mathbb{C}$

Posso DEFINIRE z anche in coord. POLARI :

$$z \longleftrightarrow \langle \rho, \vartheta \rangle, \quad \text{dove}: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

MODULO di z — FASE di z

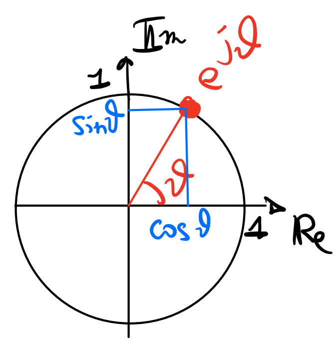
Quindi :

c. RETT. : $\langle x, y \rangle \longleftrightarrow z = x + jy$

c. POL : $\langle \rho, \vartheta \rangle \longleftrightarrow z = \rho \cdot e^{j\vartheta}$

EULERO introduce l'ESPONENZIALE COMPLESSO :

$z = e^{j\vartheta} \longrightarrow$ MODULO $= 1$, FASE $= \vartheta$



RAPPRES. ESPONENZIALE di z :

$\langle \rho, \vartheta \rangle \longleftrightarrow z = \rho \cdot e^{j\vartheta}$

FORMULA di EULERO :

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j \sin\vartheta$$

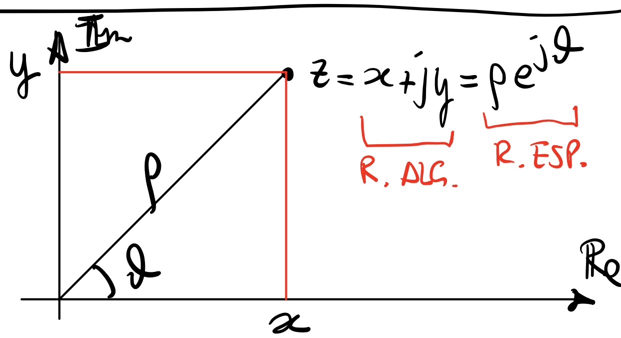
$$z = \rho \cdot e^{j\vartheta} = \underbrace{\rho \cos\vartheta}_{x} + j \underbrace{\rho \sin\vartheta}_{y} \longleftrightarrow \langle x, y \rangle$$

In sintesi :

$$z = x + jy = \rho \cdot e^{j\vartheta}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(y/x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot \sin\vartheta \end{cases}$$

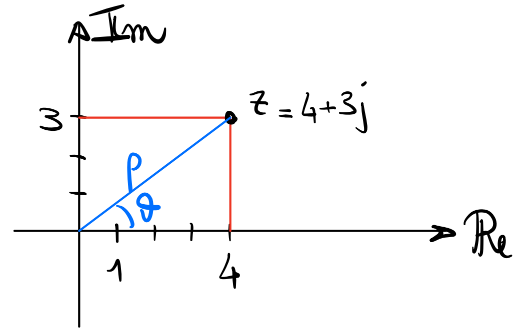


ESEMPI:

Consideriamo: $z = 4 + 3j$

F. ALGEBRICA

$\mathrm{Re}[z] = 4$; $\mathrm{Im}[z] = 3$



lo voglio rappresentare in F. ESPONENZIALE $\rightarrow \langle \rho, \vartheta \rangle$

MODULO di z: $|z| = \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

FASE di z: $\measuredangle z = \vartheta = \operatorname{atan2}(y,x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \simeq 0{,}64 \text{ rad} \simeq 36{,}9^\circ$

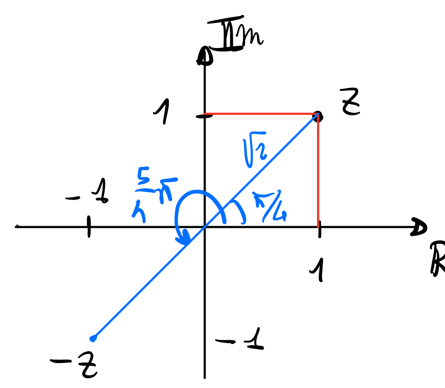
$$\boxed{z = 4 + 3j = 5e^{0{,}64j}}$$

ESEMPIO di CALCOLO ATAN2

Dato $z = 1 + j$: $\langle 1, 1 \rangle$

MODULO: $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

FASE $\measuredangle z = \operatorname{atan2}(1,1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ $(=45^\circ)$



Considero: $-z = -1 - j$

MODULO: $|z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

FASE: $\measuredangle(-z) = \operatorname{atan2}(-1,-1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \operatorname{arctg} 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$

$z = 0 \longrightarrow$ $\mathrm{Re}[z] = 0$, $\mathrm{Im}[z] = 0$; $|z| = 0$, $\measuredangle z \; \nexists$

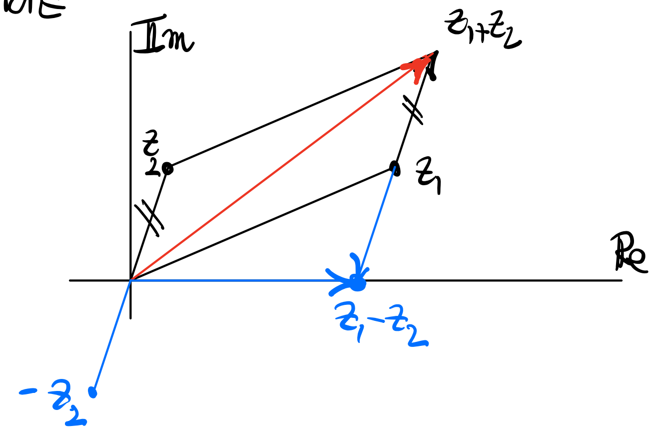
OPERAZIONI con i NUMERI COMPLESSI

SOMMA (e SOTTRAZIONE)

In forma ALGEBRICA:

Dati: $\begin{cases} z_1 = x_1 + j y_1 \\ z_2 = x_2 + j y_2 \end{cases} \longrightarrow z_S = z_1 + z_2 = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{x_S} + j\underbrace{(y_1 + y_2)}_{y_S}$

sommo le comp. REALI e le c. IMMAGINARIE



Sul piano di GAUSS: somma di VETTORI

DIFFERENZA: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

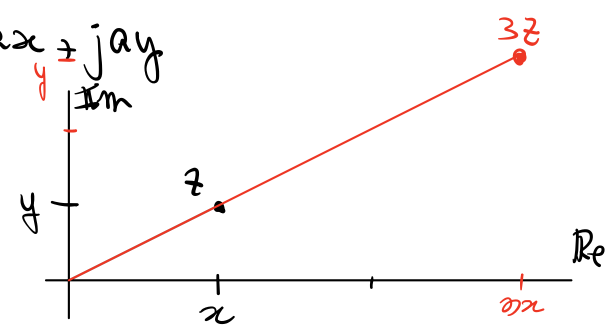
In forma ESPONENZIALE? → DIFFICILE

↳ CONVERTO in f. ALGEBRICA

MOLTIPLICAZIONE per un N. REALE (SCALATURA)

in forma ALGEBRICA:

Dati: $\begin{cases} z = x + jy \in \mathbb{C} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow a \cdot z = ax + jay$



Sul piano di GAUSS: moltiplico per a la lunghezza del vettore

in forma ESPONENZIALE:

Dati: $\begin{cases} z = \rho \cdot e^{j\vartheta} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow a \cdot z = a\rho e^{j\vartheta}$: MOLTIPL. il MODULO per a (FASE INVARIATA)

PRODOTTO di NUMERI COMPLESSI

In forma ALGEBRICA: prodotto algebrico (ricordando che $j^2 = -1$)

Dati: $\begin{cases} z_1 = x_1 + j y_1 \\ z_2 = x_2 + j y_2 \end{cases} \rightarrow z_p = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + j y_1)(x_2 + j y_2) =$

$$= x_1 x_2 + j x_1 y_2 + j y_1 x_2 + (-1) y_1 y_2 =$$

$$= \underbrace{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}_{x_p} + j \underbrace{(x_1 y_2 + y_1 x_2)}_{y_p} = x_p + j y_p$$

In forma ESPONENZIALE:

$\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta_2} \end{cases} : \quad z_p = \rho_p e^{j\vartheta_p} \qquad \rho_p ? ; \ \vartheta_p ?$

$\begin{cases} \rho_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2} = \dots \text{PROVATE} = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \vartheta_p = \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}$

Dati: $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta_2} \end{cases} \longrightarrow z_p = z_1 \cdot z_2 = \rho_p e^{j\vartheta_p} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

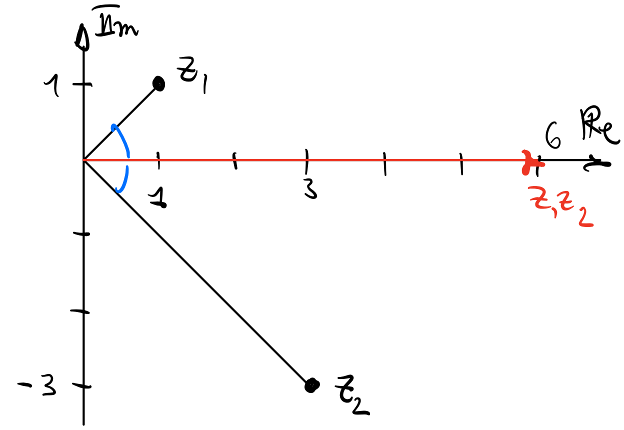
MODULO: PRODOTTO MODULI
FASE: SOMMA FASI

ESEMPIO DI PRODOTTO:

Dati: $z_1 = 1 + j : \langle 1, 1 \rangle$

$z_2 = 3 - 3j : \langle 3, -3 \rangle$

Calcolare $z_1 \cdot z_2$



F. ALGEBRICA:

$$z_1 \cdot z_2 = (1+j)(3-3j) = 3 \cancel{-3j} \cancel{+3j} + 3 = 6$$

F. ESPONENZIALE:

$$z_1 = 1 + j = \rho_1 e^{j\vartheta_1} = \sqrt{1^2 + 1^2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = 3 - 3j = \rho_2 e^{j\vartheta_2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\rightarrow z_1 z_2 = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}\, e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = 6 \cancel{e^{j0}}$$

$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$\vartheta_1 = \operatorname{atan2}(1,1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

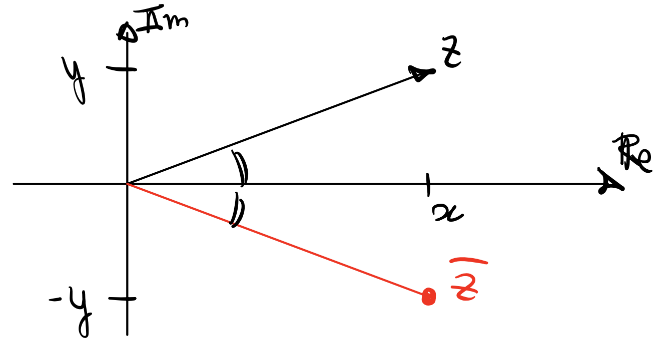
$\vartheta_2 = \operatorname{atan2}\left(\frac{-3}{3}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

COMPLESSO CONIUGATO

Dato $z \in \mathbb{C}$, si definisce COMPLESSO CONIUGATO di z: $\bar{z}$ (o z^*) il numero con la STESSA p. REALE di z e p. IMMAGINARIA OPPOSTA

$z \in \mathbb{C}$: $z = x + jy = \rho e^{j\vartheta} \longrightarrow \bar{z} = x - jy = \rho e^{-j\vartheta}$

Sul piano di Gauss:



$\bar{z}$: STESSO MODULO di z, FASE OPPOSTA

PROPRIETÀ del COMPLESSO CONIUGATO

SOMMA : $z + \bar{z} = (x + \cancel{jy}) + (x - \cancel{jy}) = 2x = 2\,\mathrm{Re}[z] \in \mathbb{R}$ Somma è REALE

PRODOTTO : $z \cdot \bar{z} = (x+jy)(x-jy) = x^2 + \cancel{jxy} - \cancel{jxy} + y^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \in \mathbb{R}$, $\rho^2 > 0$, $x^2+y^2 = |z|^2$ Prodotto è REALE e POSITIVO

INVERSO di n. COMPLESSO

Dato $z \in \mathbb{C}$: z^{-1} tale che : $z \cdot z^{-1} = 1$

F. ESPONENZIALE : $z = \rho e^{j\vartheta} \longrightarrow z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{j(-\vartheta)}$

Verifico: $z \cdot z^{-1} = \rho e^{j\vartheta} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-j\vartheta} = \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}} e^{\cancel{j(\vartheta - \vartheta)}} = 1$

F. ALGEBRICA :

ricordo che $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \longrightarrow z \cdot \underbrace{\frac{\bar{z}}{|z|^2}}_{z^{-1}} = 1$

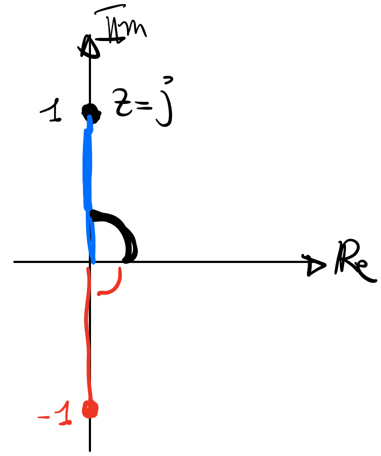
Dato : $z = x + jy \longrightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$

ESEMPIO : INVERSO di $z = j \longrightarrow z^{-1} = \frac{1}{j}$?

F. ESP. : $z = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \longrightarrow z^{-1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

F. ALGEBRICA : $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-j}{1^2} = -j$

$\boxed{\frac{1}{j} = -j}$



DIVISIONE fra N. COMPLESSI

: (moltiplicazione per l'INVERSO : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2}\right)$)

In forma ESPONENZIALE :

Dati: $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{j\vartheta_2} \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} e^{-j\vartheta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$

$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2} e^{-j\vartheta_2}$

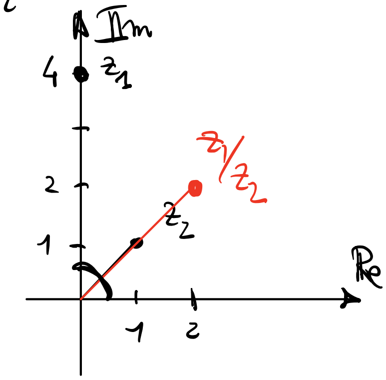
MODULO: RAPPORTO tra i MODULI
FASE: DIFFERENZA tra le FASI

In forma ALGEBRICA:

Dati: $\begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{x_2^2+y_2^2}$

ESEMPIO:

Calcolare $\frac{z_1}{z_2}$ dove: $z_1 = 4j$, $z_2 = 1+j$



Algebrica:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|} = \cancel{4}^{2} j \, \frac{1-j}{\cancel{2}} = 2j(1-j) = 2j+2 = 2+2j$$

Esponenziale

$z_1 = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$ $\longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$

ELEVAMENTO a POTENZA di N. COMPLESSI

In forma ESPONENZIALE

Dato $z = \rho e^{j\vartheta} \longrightarrow z^n = \overbrace{z \cdot z \cdots z}^{n \text{ VOLTE}} = \rho^n e^{jn\vartheta}$ $\begin{cases} \text{MODULO ELEVATO a } n \\ \text{FASE MOLTIPLICATA per } n \end{cases}$

ESTRAZIONE di RADICE n-ESIMA

DEF: $y = \sqrt[n]{z}$ SSE $y^n = z$ $\quad y, z \in \mathbb{C} \quad n \in \mathbb{Z}$

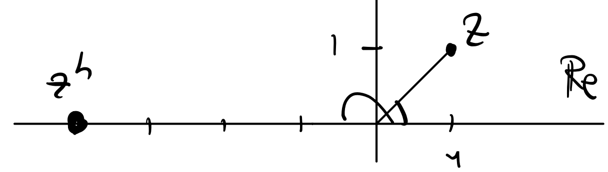
$y^n - z = 0$: POLINOMIO di GRADO n in : n SOLUZIONI in $\mathbb{C}$!!

Dato $z = \rho e^{j\vartheta} \rightarrow$ $\boxed{y_i = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{j\frac{\vartheta + 2\pi i}{n}} ; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1}$

Verifica: $y_i^n = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n e^{j\frac{\vartheta+2\pi i}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}} = \rho e^{j(\vartheta + 2\pi i)}$, $i = 0 \ldots n-1$

ESEMPIO:

Calcolare $z = (1+j)^4 = \left(\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4\, e^{j\frac{\pi}{4}\cdot 4} = 4e^{j\pi} = -4$

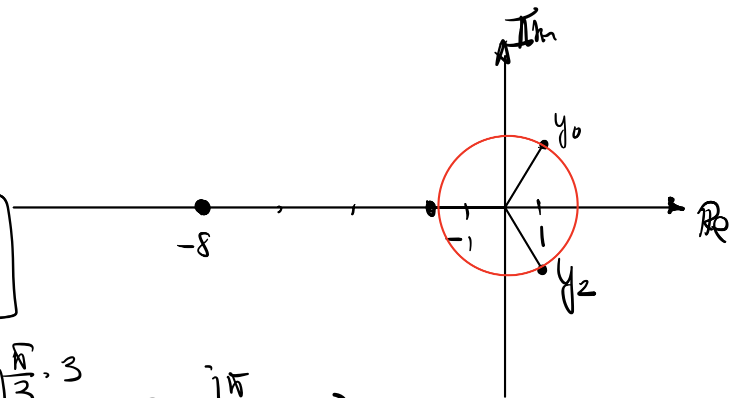


Calcolare: $y = \sqrt[3]{\underbrace{-8}_{z}}$ $\quad z = -8 \in \mathbb{C}$

f. esp:

$z = -8 = 8e^{j\pi}$

$$\boxed{y_i = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\, e^{j\frac{\pi + 2\pi i}{3}}, \quad i = 0,1,2}$$



$y_0 = 2e^{j\pi/3} \longrightarrow y_0^3 = 2^3 e^{j\frac{\pi}{3}\cdot 3} = 8e^{j\pi} = z$ ✓

$y_1 = 2e^{j\pi} = -2 \qquad y_1^3 = 2^3 e^{j\pi 3} = 8e^{j3\pi} = z$ ✓

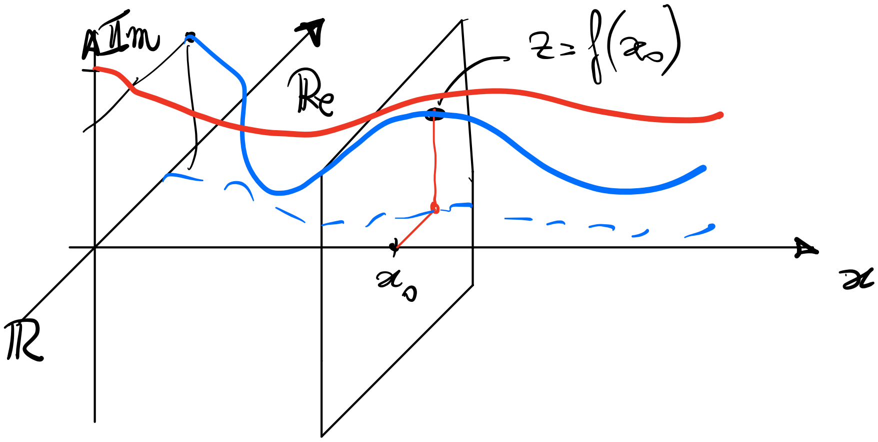
$y_2 = 2e^{j\frac{5}{3}\pi} \longrightarrow y_2^3 = 2^3 e^{j\pi\frac{15}{3}} = 8e^{j5\pi} = z$ ✓

RAPPRESENTAZIONE di FUNZIONI COMPLESSE di variabile REALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,(\equiv \mathbb{R}^2)$; $\quad z = f(x)$, dove $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = f(x)$



Date $z = f(x)$, $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[z] = \mathrm{Re}[f(x)] \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}[z] = \mathrm{Im}[f(x)] \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} |z| = |f(x)| \in \mathbb{R}^+ \\ \measuredangle z = \measuredangle f(x) \in \mathbb{R} \quad (0 - 2\pi) \end{cases}$$

rappres. "algebrica" di $z = f(x)$ $\qquad$ rappr. "ESPONENZIALE" di $z = f(x)$

Esempio di f. complesse: il FASORE

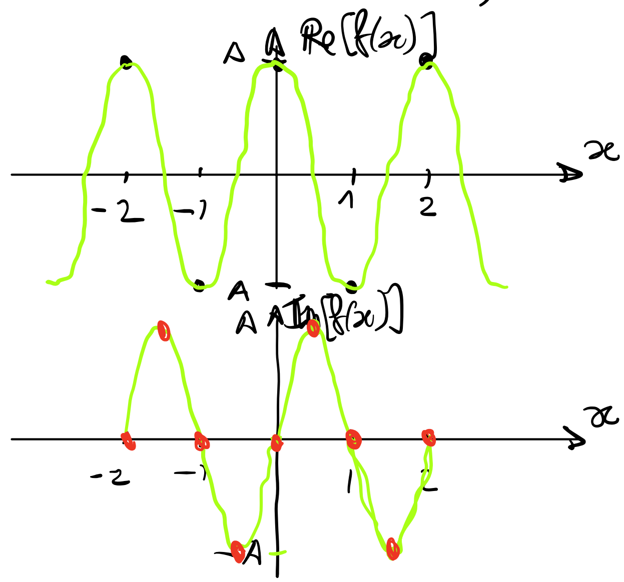
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \quad z = f(x) = A e^{j\pi x}, \quad x \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{C}$$

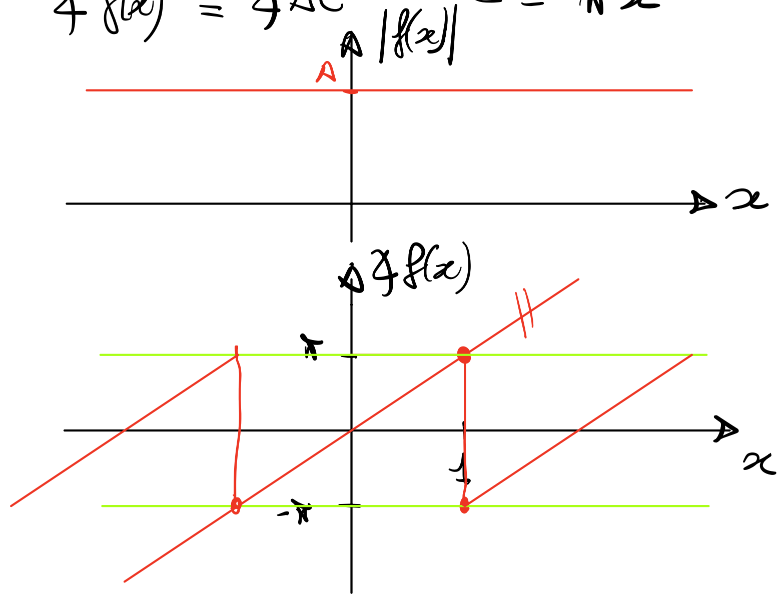
$$f(x) = A e^{j\pi x} = (\text{Eulero}) = \underbrace{A\cos(\pi x)}_{Re[\,]} + j\underbrace{A\sin(\pi x)}_{Im[\,]}$$

[Eulero: $e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta$]

$$Re[f(x)] = A\cos(\pi x)$$
$$Im[f(x)] = A\sin(\pi x)$$

$$|f(x)| = |A e^{j\pi x}| = A$$
$$\measuredangle f(x) = \measuredangle A e^{j\pi x} = \pi x$$





ESERCIZI di RIEPILOGO

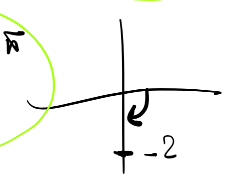
Dati: $z_1 = 3+4j$ e $z_2 = -2j$, calcolare z_1/z_2

$$\sqrt{2^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \frac{5}{2}$$

f. ALG.: $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = (3+4j)\dfrac{+\cancel{2}j}{2^{\cancel{2}}} = (3+4j)\dfrac{j}{2} = \dfrac{3}{2}j - 2 = -2 + \dfrac{3}{2}j$

f. ESP.: $z_1 = \sqrt{3^2+4^2}\, e^{j \operatorname{arctg} \frac{4}{3}} = 5e^{j0,3\pi} \rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5}{2} e^{j(0,3\pi + 0,5\pi)} = \dfrac{5}{2} e^{j0,8\pi}$

$z_2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$

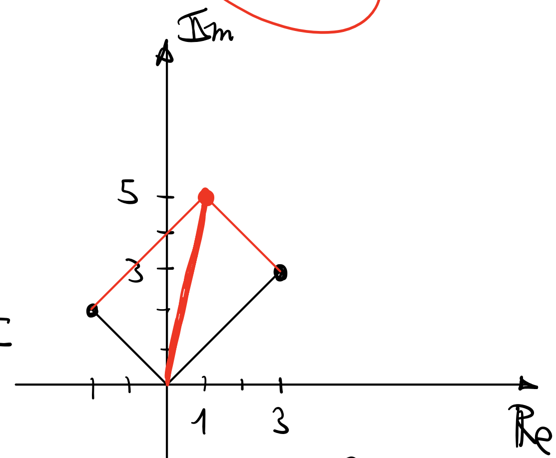


Calcolare: $z = 3\sqrt{2}\, e^{j\pi/4} + \dfrac{(2j)^2}{1+j} = 3\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} + \dfrac{-4}{1+j}$

$$\frac{-4}{1+j} = (-4)\frac{1}{1+j} = (-4)\frac{1-j}{1^2+1^2} = \frac{-4}{2}(1-j) = -2+2j$$

$$z = \underbrace{3\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}}\ \underbrace{-2+2j} = 3+3j-2+2j = \boxed{1+5j}$$

$$3\sqrt{2}\, e^{j\pi/4} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3+3j$$



RAZIONALIZZAZIONE di FRAZIONI COMPLESSE

$z = \frac{4-i}{1+3i}$ → RAZIONALIZZARE → RICONDURE a un N. COMPLESSO

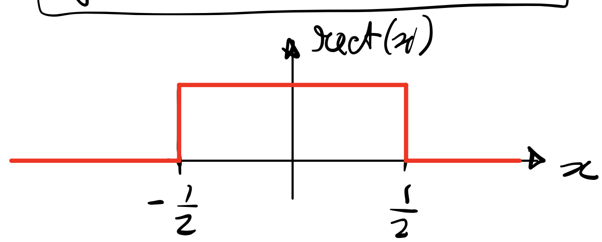
COME? MOLTIPLICO NUM. e DEN. per il COMPL. CON. del DENOMINATORE:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$z = \frac{4-j}{1+3j}\cdot\frac{1-3j}{1-3j} = \frac{(4-j)(1-3j)}{1^2+3^2} = \frac{1}{10}(4-j-12j-3) = \frac{1}{10} - \frac{13}{10}j$$

ES: rappresentare graficamente la funzione: $\boxed{y(x) = rect(x)\cdot e^{j2\pi x}}$

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



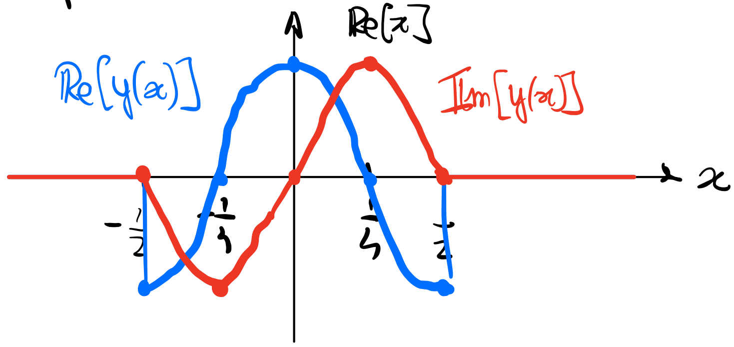
$$\rightarrow y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \in \mathbb{C}$$

a) Parti Reale / Immaginaria (formula di Eulero: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$)

$$y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} = \underbrace{\cos(2\pi x)} + j\,\underbrace{\sin(2\pi x)} & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y_R(x) = Re[y(x)] = \begin{cases} \cos(2\pi x) & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

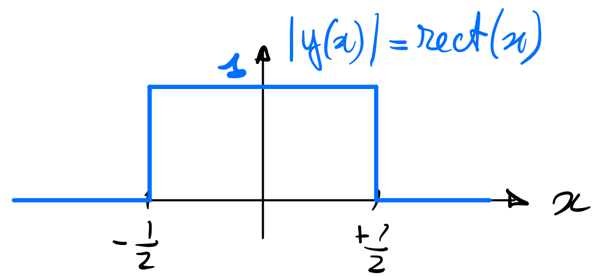
$$y_I(x) = Im[y(x)] = \begin{cases} \sin(2\pi x) & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



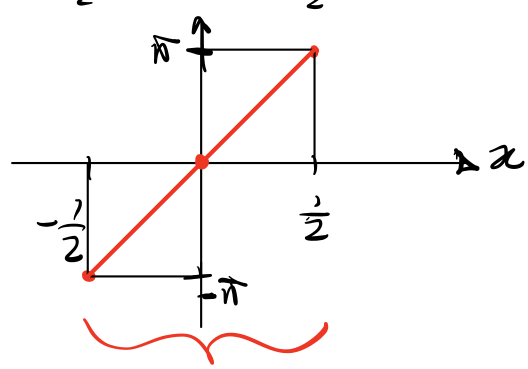
b) MODULO e FASE

$$y(x) = \begin{cases} e^{j2\pi x} & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad |y(x)| = \begin{cases} |e^{j\pi 2x}| = 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ |0| = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$\measuredangle y(x) = \begin{cases} \measuredangle(e^{j2\pi x}) = 2\pi x & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \measuredangle 0 \; \nexists & \text{altrove} \end{cases}$$



$|z| = 0 \longrightarrow \measuredangle z$ NON ESISTE !