Corso di

Visione Artificiale

Laurea Magistrale in Informatica (F94)

Docenti:

Raffaella Lanzarotti

Federico Pedersini

Dipartimento di Informatica

Università degli Studi di Milano

Generazione di un’immagine (image formation)

Modelli radiometrici di formazione dell'immagine

- Modello radiometrico di camera
  - della lente
  - del sensore (calibrazione radiometrica, HDR)
- Modelli di riflessione superficiale
- Applicazioni:
  - Lightness constancy
  - Photometric stereo
  - BRDF – Helmholtz stereopsis

(Forsyth/Ponce: Capitolo 2)

Grandezze radiometriche: definizione di angolo solido

- **Angolo piano [radianti]:**
  - Rapporto tra lunghezza arco sotteso (s) e raggio (R):
  - Angolo giro (360º):

$$\vartheta = \frac{s}{R} \quad [\text{rad}]$$

Angolo giro:

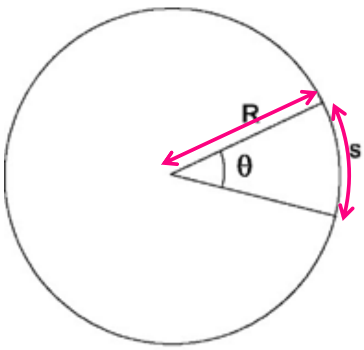
$$\vartheta = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

- **Angolo solido [steradianti]:**
  - Rapporto tra area sottesa (A) e raggio al quadrato (R^2):

$$\Omega = \frac{A}{R^2} \quad [\text{sr}]$$

Angolo solido "giro":

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$



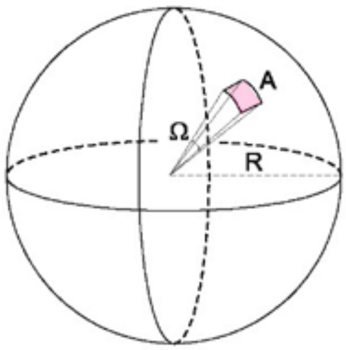


image from:
www.globalspec.com

Grandezze radiometriche

- **Radianza (*L*):** potenza **emessa** da una superficie luminosa, per unità di area e di angolo solido di emissione
  - È la misura di ***quanto "abbaglia"*** una superficie luminosa
  - Unità di misura: Watt / (m^2 sr) ; (W m^{-2} sr^{-1})

- **Irradianza (*E*):** potenza **ricevuta** su una superficie, per unità di area
  - È la misura di ***quanto viene illuminata*** una superficie luminosa
  - Unità di misura: Watt / m^2 ; (W m^{-2})

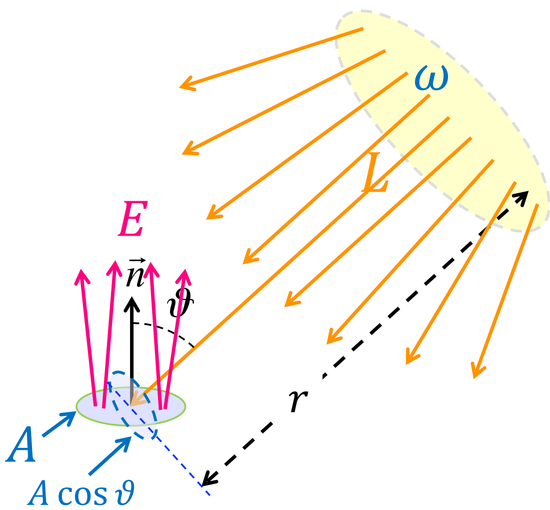
Legge di **Lambert** ("legge del coseno"):

*la irradianza **E** di una superficie illuminata da una sorgente con radianza **L** vale:*

$$E = \frac{L\,\omega}{r^2}\cos\vartheta$$

in forma differenziale:

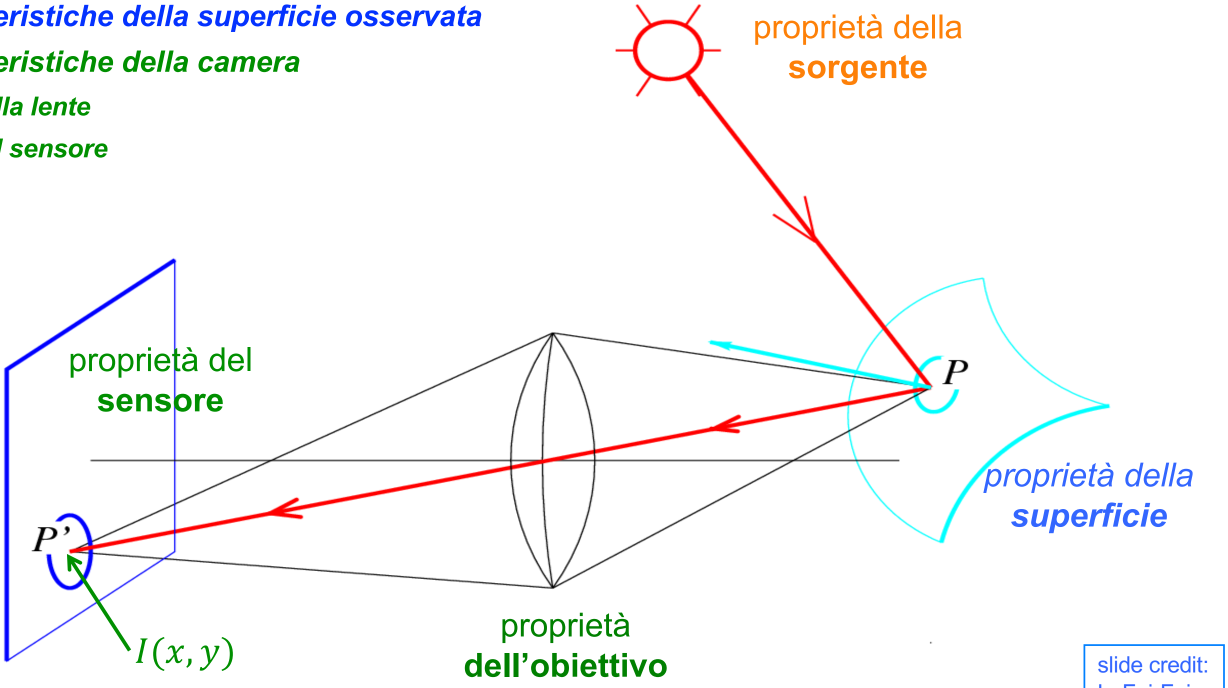
$$dE = \frac{L}{r^2}\cos\vartheta\, d\omega$$



Processo di acquisizione immagine (radiometrico)

Che cosa determina la luminosità di un pixel?

- *Caratteristiche della sorgente*
- *Caratteristiche della superficie osservata*
- *Caratteristiche della camera*
  - *della lente*
  - *del sensore*

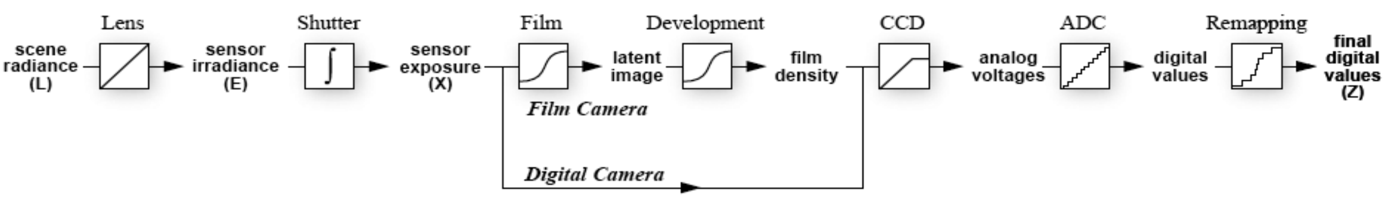


slide credit:
L. Fei-Fei

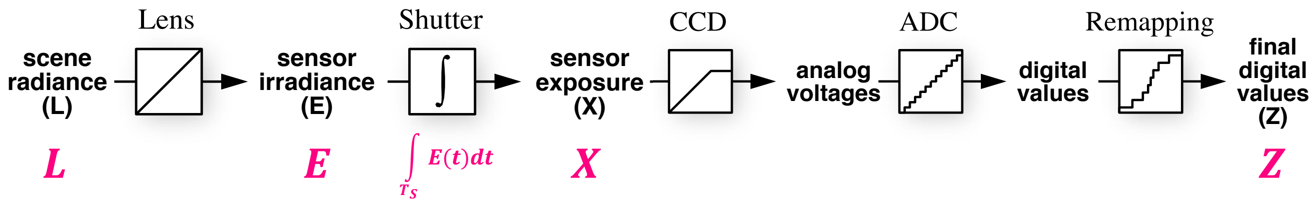
Modello di luminosità di un pixel

Che cosa determina la luminosità di un pixel?

- ***Image Acquisition Pipeline*** [Debevec, Malik]
  da: radianza del punto di scena ***L*** → a: valore di luminanza/colore del pixel ***Z***



- ***Il nostro caso: immagini digitali***

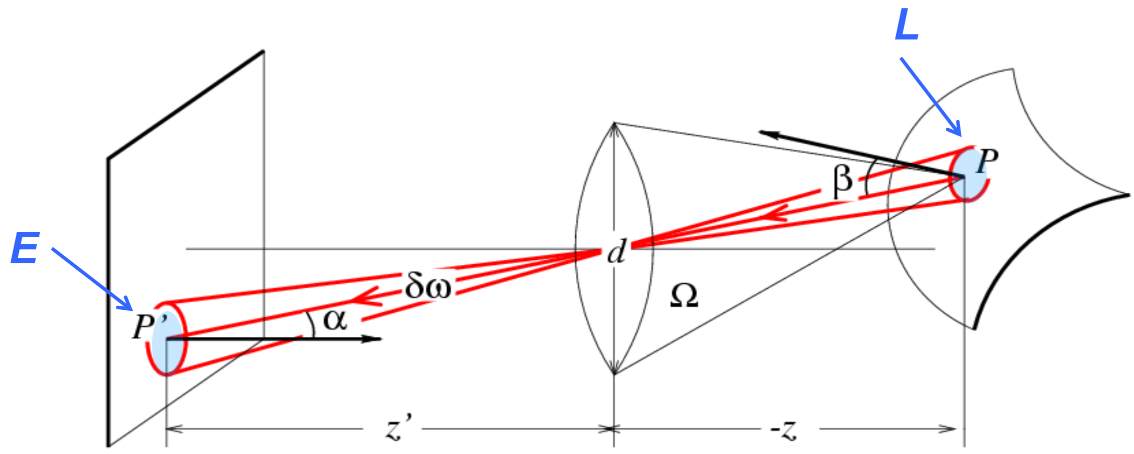


Radiometria di sistemi ottici a lenti sottili

Radiometria delle lenti sottili

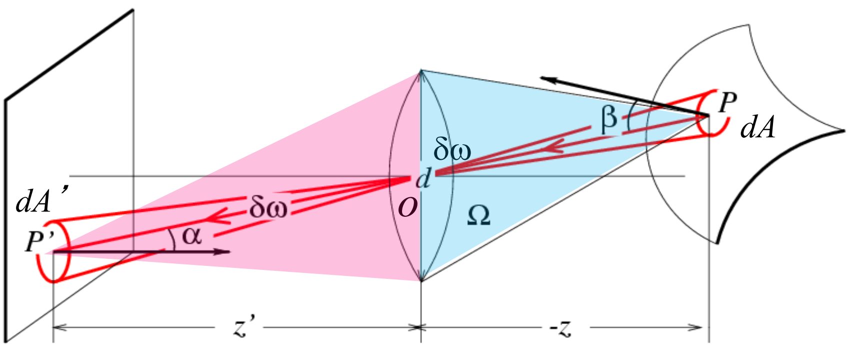
- ***L***: radianza emessa dal punto ***P*** della sorgente, verso ***P'***
- ***E***: irradianza ricevuta nel punto immagine ***P'*** attraverso la lente

Che relazione c'è tra L ed E ?



Forsyth & Ponce, Sec. 4.2.3

Radiometria di sistemi ottici a lenti sottili



$$|OP| = \frac{z}{\cos\alpha}$$

$$|OP'| = \frac{z'}{\cos\alpha}$$

Area lente: $\frac{\pi d^2}{4}$

Il contributo di potenza ***dP*** emessa dalla sorgente *dA* di radianza ***L*** verso la lente:

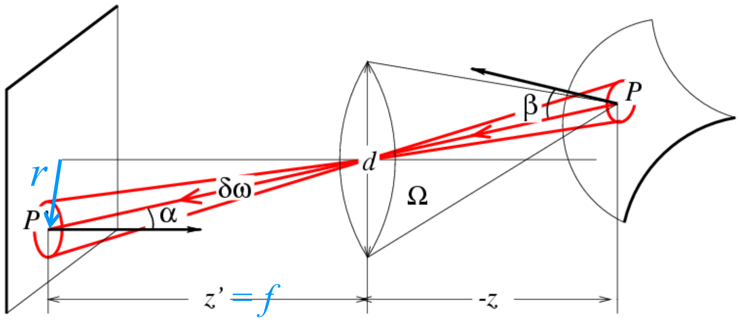
$$dP = L\Omega\, dA\cos(\beta) \qquad \Omega = \frac{Area}{|OP|^2} = \frac{\frac{\pi}{4}d^2\cos\alpha}{\left(\frac{z}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{z}\right)^2\cos^3\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{dP = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{z}\right)^2 L\cos^3\alpha\cos\beta\, dA}$$

La potenza *dP* viene concentrata dalla lente in *P'*, dando quindi irradianza ***E*** sull'areola *dA'*:

$$E = \frac{dP}{dA'} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{z}\right)^2 L\frac{dA}{dA'}\cos^3\alpha\cos\beta \qquad \delta\omega = \frac{dA'\cos\alpha}{(z'/\cos\alpha)^2} = \frac{dA\cos\beta}{(z/\cos\alpha)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dA'} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\left(\frac{z}{z'}\right)^2$$

$$\boxed{E = \left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{z'}\right)^2\cos^4\alpha\right]L}$$

Radiometria di sistemi ottici a lenti sottili



$$E = \left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{z'}\right)^2 \cos^4(\alpha)\right] L \approx \left[\frac{\pi}{4}\frac{1}{N^2}\frac{f^4}{\left(f^2+r^2\right)^2}\right] L$$

f: lunghezza focale = z'

$1/N$: apertura (f-number) $= d\,/\,f$

α: deviaz. ang.: $\cos\alpha = \frac{f}{|OP'|} = \frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}$

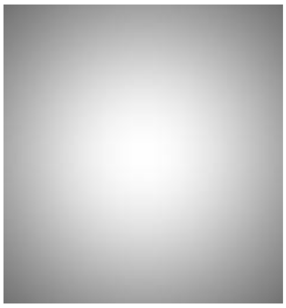
L'irradianza ***E:***

- è direttamente proporzionale alla radianza ***L***
- è proporzionale al quadrato dell'apertura: $^1/_N = {}^d/_f$
- cala allontanandosi dal centro ottico come $\cos^4\alpha = \left(\frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right)^4$

Applicazioni:

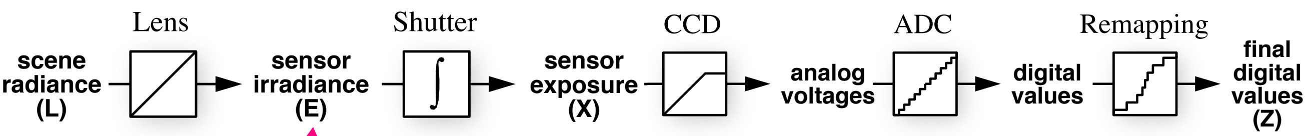
- **calibrazione intrinseca:** posso stimare f, d, c_X, c_Y, ...

S. B. Kang and R. Weiss,
Can we calibrate a camera using an image of a flat, textureless Lambertian surface?
ECCV 2000



Radiometria di sistemi ottici a lenti sottili

Che cosa determina la luminosità di un pixel?



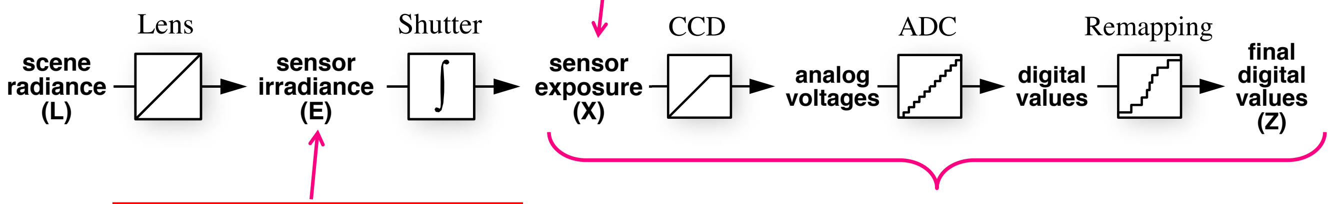
$$X = \int_{T_S} E(t)\,dt$$

$$E = \left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{z'}\right)^2 \cos^4\alpha\right] L$$

Source: S. Seitz, P. Debevec

Calibrazione radiometrica (*camera response function*)

$X = \int_{T_S} E(t)dt = E \cdot \Delta t$ (se E è costante nel tempo)



$$E = \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{z'} \right)^2 \cos^4 \alpha \right] L$$

$$Z = f(X) = f(E \cdot \Delta t)$$

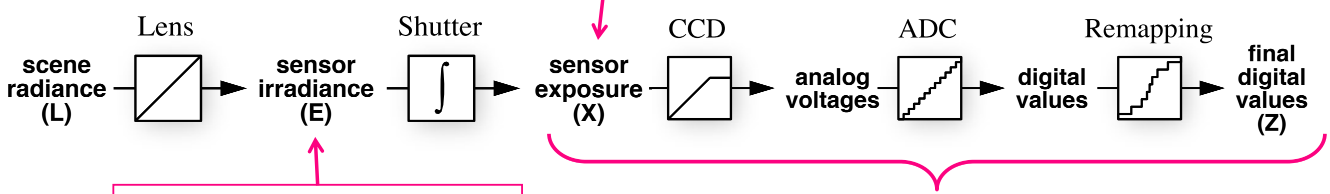
Calibrazione radiometrica:
Determinazione della relazione $Z = f(E)$ (**Z** noto, **E** incognito)

***X*: Esposizione:** energia raccolta nel punto immagine [Joule/m^2 = Watt·s/m^2]

$$X = E \cdot \Delta t = L \cdot A^2 \cdot \Delta t \quad [\mathrm{J/m^2}]$$

Calibrazione radiometrica (*camera response function*)

$$X = E \cdot \Delta t$$



$$E = \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{z'} \right)^2 \cos^4 \alpha \right] L$$

$$Z = f(X) = f(E \cdot \Delta t)$$

Principio di reciprocità:

- il sensore misura energia → è sensibile all'esposizione $X = E \cdot \Delta t$
  → non è in grado di distinguere ***E*** da Δt
- Δt però è noto (parametro controllato nel processo di acquisizione)

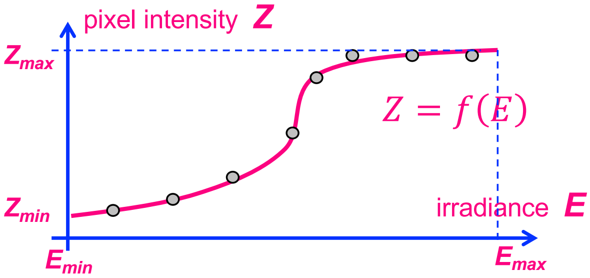
Calibrazione radiometrica: stima di $f: Z = f(X) \quad \rightarrow \quad E = \dfrac{X}{\Delta t}$

Calibrazione radiometrica (*camera response function*)

Calibrazione radiometrica: *stima di* f: $Z = f(X)$

- f in genere è <u>non lineare</u>, soprattutto agli estremi, anche per aumentare il range dinamico (DR):

$$DR_E = \frac{E_{max}}{E_{min}} > DR_Z = \frac{Z_{max}}{Z_{min}}$$



Come ottenere una calibrazione radiometrica?

1. Modellazione a priori

Modellazione fisica accurata di ogni fase della pipeline

- misuro: apertura, sensibilità del chip, ADC ... ➔ ✗ *"really hard to get right"*

2. Calibrazione radiometrica con radianze note

- Acquisizione di immagini multiple di scene con radianza ***L*** nota
- Misura dei valori di intensità corrispondenti
- Determinazione della funzione interpolante ➔ curva di calibrazione

Problema: anche ***L*** è difficile da conoscere/fissare a priori!

slide credit: Steve Seitz

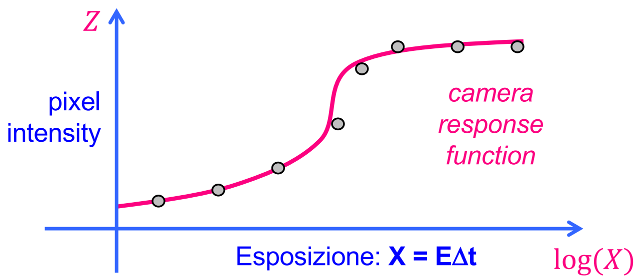
Calibrazione radiometrica (*camera response function*)

3. Calibrazione radiometrica con esposizioni multiple

- Acquisisco più immagini della **stessa scena** (stessa *E*) con <u>esposizioni differenti</u>
  - Tipicamente, con tempi diversi: 1/1000 s, 1/100 s, 1/10 s, 1 s
- L'esposizione di ogni pixel ***X = EΔt*** varia di conseguenza
  - nell'esempio varia di un fattore 10 ogni volta
- I valori del pixel *Z* ad ogni esposizione saranno:

$$f(X=E),\ f(X=10\ E),\ f(X=100\ E),\ \dots$$

- **Calibrazione radiometrica:** curva interpolante la risposta tra i punti ottenuti sul grafico $Z = f(X)$

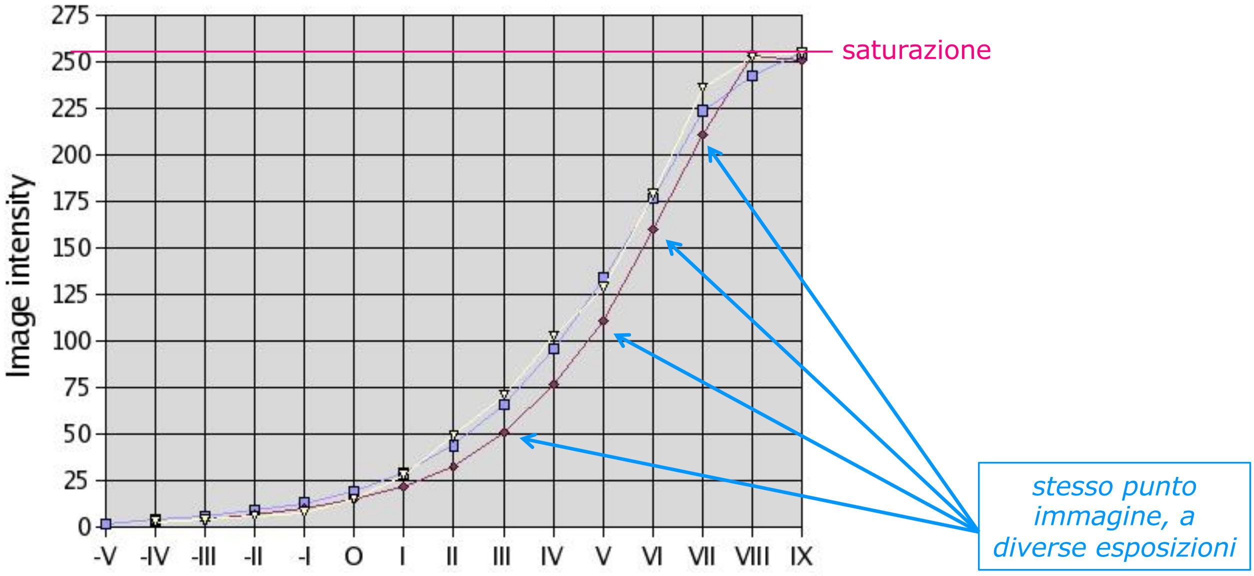


slide credit: Steve Seitz

Calibrazione radiometrica

Esempio di calibrazione radiometrica:

- sensore digitale con risoluzione 8 bit/pixel → 256 livelli di grigio



EV (*E*xposure *V*alue)

scala logaritmica di esposizione: $\log X$

(+1 EV → X raddoppia)

Esposizione (X) e range dinamico (EV)

L'irradianza ***E*** in una scena può avere un **range dinamico** molto elevato, quindi **troppo elevato** per essere rilevato dal sensore (CCD, CMOS) della camera

EV – ***E*xposure *V*alue**: scala logaritmica di esposizione

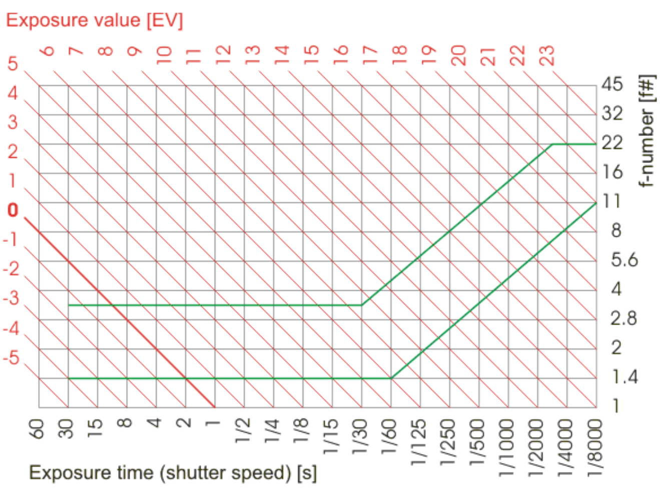
- **1 EV** (“**1 stop**”) → **fattore 2** su ***X*** (***X*** raddoppia)

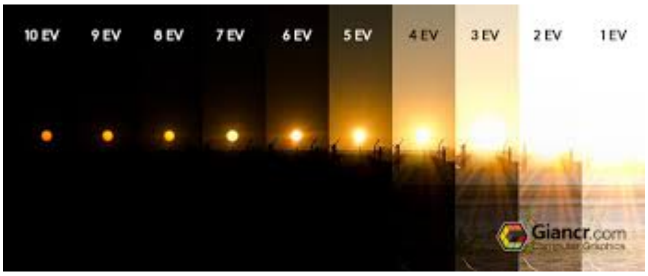
$$EV = \log_2 L + k$$

- Dato **EV** (***L***), per regolare **X** sul sensore, posso:
  - cambiare l'apertura: **A**
  - cambiare il tempo di esposizione: Δt

$$X = E \cdot \Delta t = L \cdot \boxed{A^2} \cdot \boxed{\Delta t}$$

$$DR = \frac{L_{EV23}}{L_{EV-5}} = 2^{28} = 2,62 \cdot 10^8$$



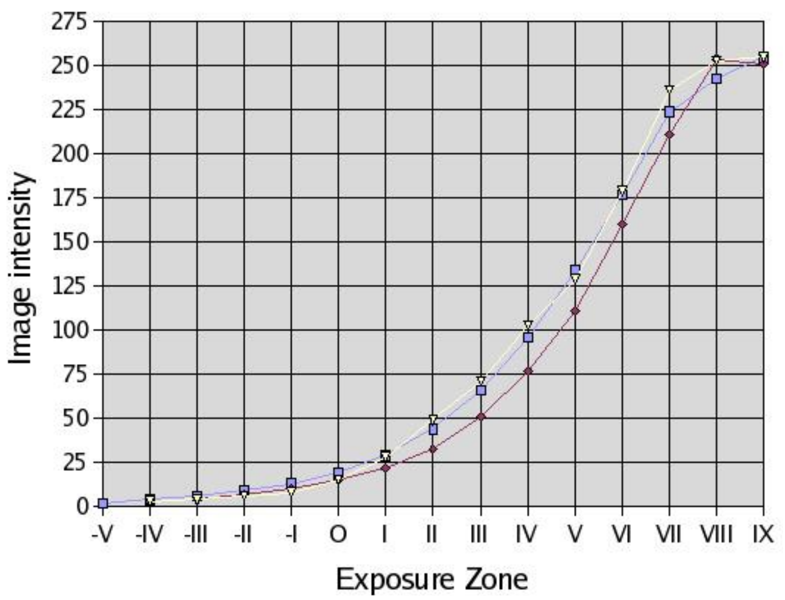


Calibrazione radiometrica

Un sensore è quantizzato su 8÷12 bit → 256÷4096 livelli di energia

⇓

il sensore digitale percepisce **solo** una **piccola porzione** del range dinamico!



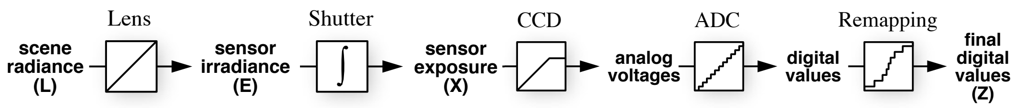
Calibrazione radiometrica e HDR

Mappe HDR (High Dynamic Range)

Combino due operazioni:

calibrazione radiometrica e stima della irradianza ***E*** (con il suo range dinamico)

- P.E. Debevec and J. Malik. *Recovering High Dynamic Range Radiance Maps from Photographs.* SIGGRAPH 1997



$\boxed{E}$ $\boxed{X = E \cdot \Delta t}$ $\boxed{Z = f(E \cdot \Delta t)}$

Tecnica:

- *Acquisisco **N** immagini della stessa scena, con **N** esposizioni (Δt) diverse fino ad avere tutto il range dinamico di E "ben esposto" in almeno una immagine*
  - Non cambio l'esposizione con il diaframma (A), perché cambierebbe ***E***!
  - → avrò pixel sottoesposti ($Z=Z_{MIN}$) e sovraesposti ($Z=Z_{MAX}$)
- *Per ogni pixel **i** dell'esposizione **j** ho un valore di intensità $Z_{i,j}$:*

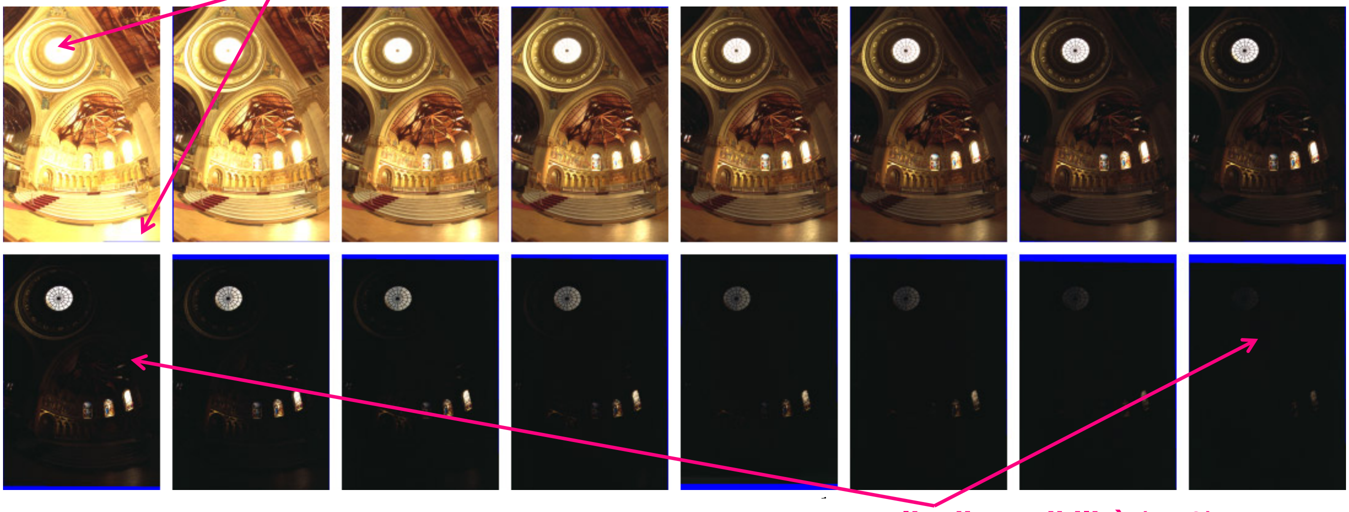
$$Z_{i,j} = f\left(E_i \cdot \Delta t_j\right)$$

Calibrazione radiometrica e HDR

Immagini a diverse esposizioni:

- Una singola immagine non è in grado di rappresentare l'intero range dinamico

saturazione (Z=255)



sotto soglia di sensibilità (Z=0)

- 16 differenti esposizioni – differenza: **1 stop** (1 EV) tra adiacenti
- Δt: da 1/1024 s (2^{-10}) a 32 s (2^5) → **DR** = $2^8\ 2^{15}$ ~ **8.000.000**

$$Z_{i,j} = f\left(E_i \cdot \Delta t_j\right)$$

Calibrazione radiometrica e HDR

- $f(Z)$ è monotona, quindi invertibile: $Z_{i,j} = f\left(E_i \cdot \Delta t_j\right) \longrightarrow f^{-1}\left(Z_{i,j}\right) = E_i \cdot \Delta t_j$
- Applico il logaritmo a entrambi i membri:

$$\ln f^{-1}\left(Z_{i,j}\right) = g\left(Z_{i,j}\right) = \ln E_i + \ln \Delta t_j \quad \rightarrow \quad \boxed{g\left(Z_{i,j}\right) - \ln E_i - \ln \Delta t_j = 0}$$

- Per ***P*** pixel rappresentativi, ***N*** esposizioni,
  G campioni della funzione $g()$: Z → X (ad es. G=256 valori di Z):
  - **P+G** incognite (E_i ,g)
  - **NP** equazioni ($Z_{i,j}$)

  se: **(N−1)P** > **G** → sistema **risolvibile** (sovradet.)

Soluzione:
trovo $\hat{\mathbf{m}} = \langle \mathbf{E}, \mathbf{g} \rangle$ che minimizza la funzione:

$$\Im\left(E,g\right) = \sum_i^P \sum_j^N \left(g\left(Z_{i,j}\right) - \ln E_i - \ln \Delta t_j\right)^2 + \lambda \sum_z^{0-255} g''(z)^2$$

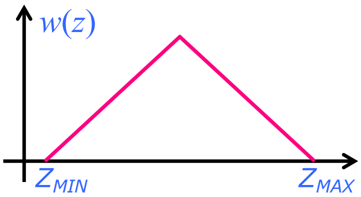
$$\hat{\mathbf{m}} = \left\langle \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{g}} \right\rangle = \underset{\mathbf{E},\mathbf{g}}{\operatorname{argmin}}\ \Im\left(\mathbf{E},\mathbf{g}\right)$$

termine di **regolarizzazione:** cresce con ***g''(z)***

λ: peso della regolarizzazione di $g()$ (scelto in base al rumore su Z)

Calibrazione radiometrica e HDR

Pesatura: aggiungo una funzione peso $w(z)$ per pesare meno il fitting agli estremi della risposta del sensore



$$\Im(E,g) = \sum_{i}^{P}\sum_{j}^{N}\left(w(Z_{i,j})\,g(Z_{i,j}) - \ln E_i - \ln \Delta t_j\right)^2 + \lambda \sum_{z}^{0-255}\left[w(z)g''(z)\right]^2$$

❖ Funzione quadratica nelle incognite ➔ risolvibile in forma chiusa mediante sistema lineare sovradeterminato omogeneo:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{m} = 0}, \quad \mathbf{m} = \langle \mathbf{E},\mathbf{g}\rangle : \quad [P+G]$$

❖ Risolvo mediante SVD: $[\mathbf{U},\mathbf{S},\mathbf{V}] = \mathrm{svd}(\mathbf{A}) \rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{V}(:,end)}$

❖ Noto **m**, posso ricavare l'irradianza ***E$_i$*** per tutti i pixel dell'immagine:

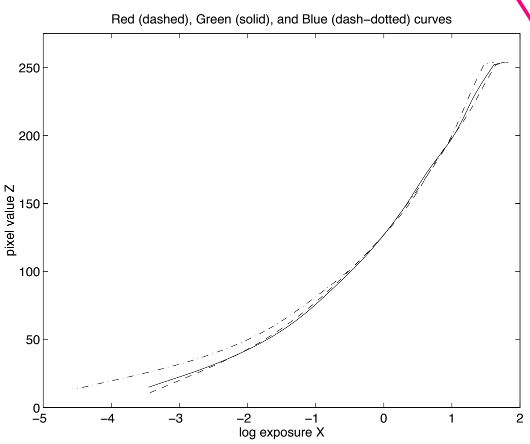
$$\boxed{\ln E_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} w(Z_{ij})\left(g(Z_{ij}) - \ln \Delta t_i\right)}{\sum_{j=1}^{N} w(Z_{ij})}}$$

Calibrazione radiometrica

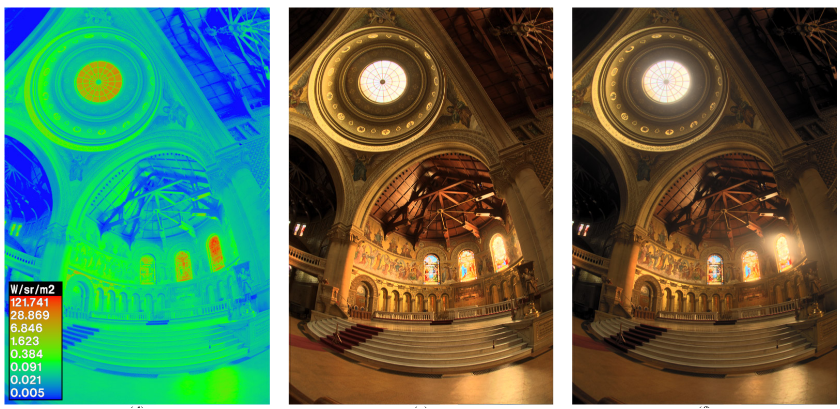
Risultati:

❖ *mappa irradianza*

❖ *calibrazione radiometrica*



(a) (b) (c)



Generazione di un'immagine (image formation)

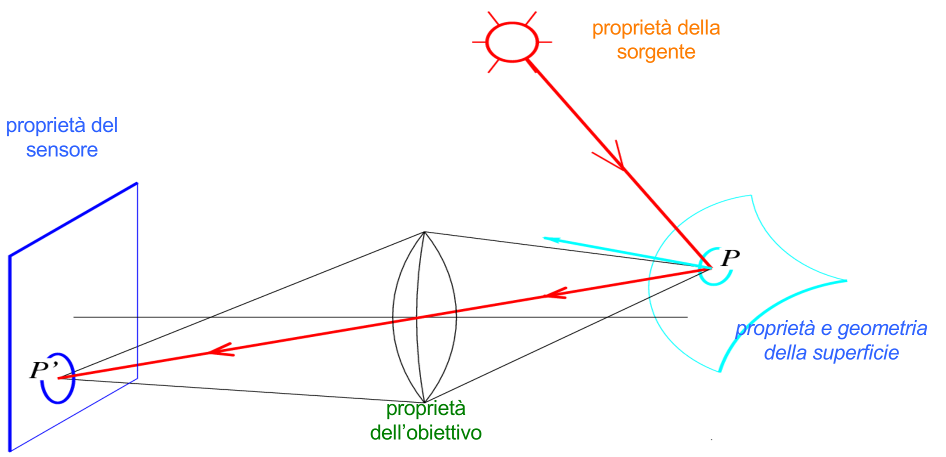
Aspetti radiometrici di formazione dell'immagine

- Modello radiometrico di camera
  - della lente
  - del sensore (calibrazione radiometrica, HDR)
- **Modelli di riflessione superficiale**
- Applicazioni:
  - Lightness constancy
  - Photometric stereo
  - BRDF – Helmholtz stereopsis

(Forsyth/Ponce: Capitolo 2)

Modelli di riflessione superficiale

- Cosa succede a un raggio di luce che colpisce un oggetto?
  - parte della luce viene assorbita (es. convertita in calore)
  - parte viene trasmessa attraverso l'oggetto (es. rifrazione)
  - **parte viene riflessa (in varie direzioni)**
  - altro (fluorescenza)
- Consideriamo in dettaglio la **riflessione**
  - Come possiamo modellizzare la riflessione nelle varie direzioni?



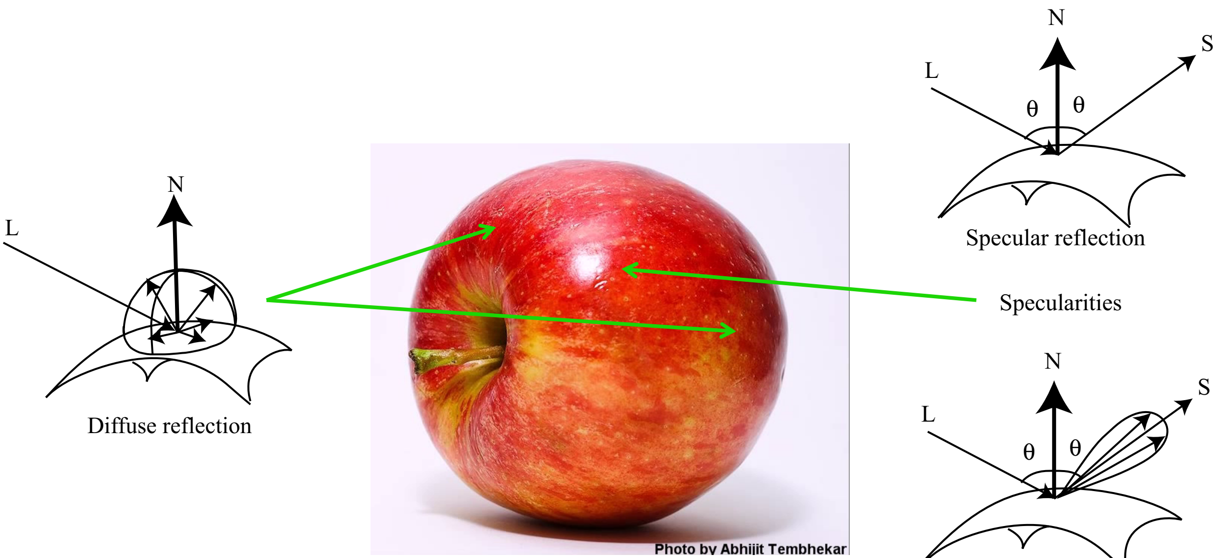
slide credit: Steve Seitz

Esempi di riflessione

slide credit: L. Cinque

Diffuse (Lambertian)/Specular surface model

- Modello di riflessione più comune:
riflessione **diffusa** + riflessione **speculare**

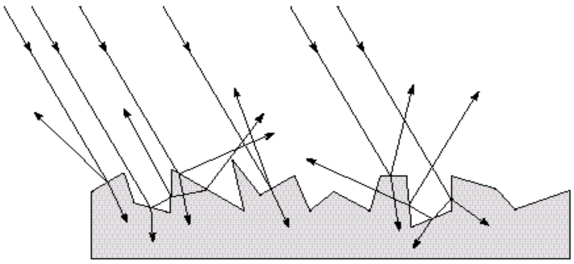


source: khanacademy.org

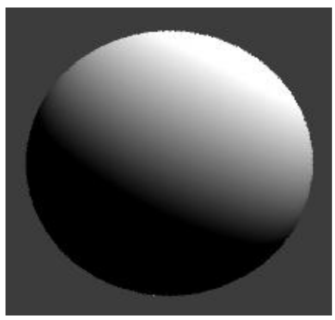
Riflessione diffusa (diffuse/Lambertian)

Riflessione **diffusa (Lambertiana)**

- Tipica di superfici opache, ruvide
- A livello microscopico: superficie scabra
  → riflessione casuale con distribuzione uniforme in tutte le direzioni
- Intensità di riflessione **costante in tutte le direzioni**
  → **intensità** (colore) **indipendente** dal **punto di osservazione**



Riflessione diffusa (Lambertiana)



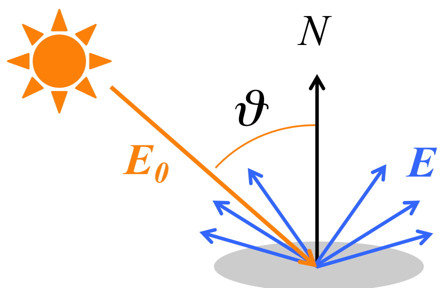
Riflessione **diffusa** (o Lambertiana):

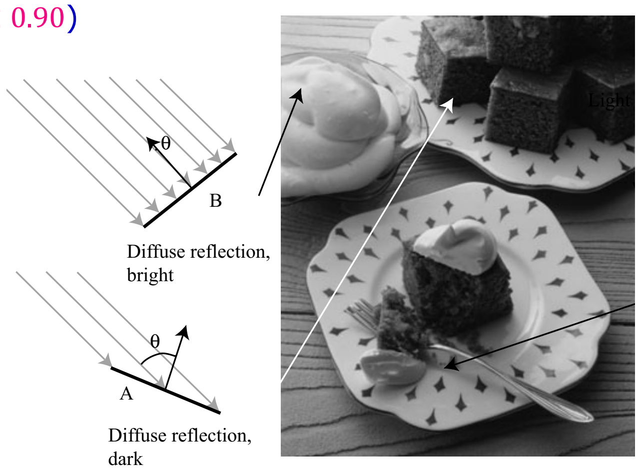
l'irradianza osservata ***E***:
– non dipende dalla direzione di osservazione,
– ma solo dalla direzione di illuminazione.

$$E = \rho E_0 \cos\vartheta = \rho\left(\vec{N}\cdot\vec{E}_0\right)$$

ρ ***albedo:*** frazione della radiosità incidente, riflessa dalla superficie: $0 < \rho < 1$ (in realtà $0.05 < \rho < 0.90$)

- ***N***: versore normale alla superficie
- ***E₀***: irradianza incidente

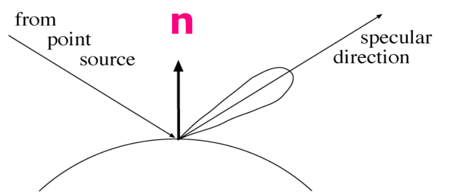




Modello speculare (*specular reflection*)

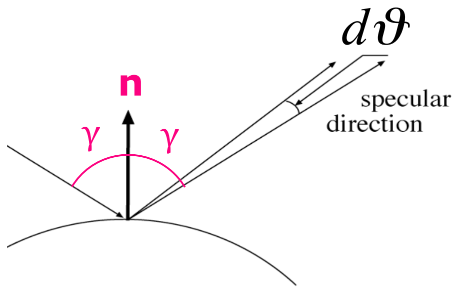
Riflessione **speculare**

- La radiazione incidente viene riflessa prevalentemente lungo la direzione speculare (simmetrica rispetto alla normale **n**)
- La distribuzione angolare dell'energia riflessa in direzione speculare definisce un lobo speculare



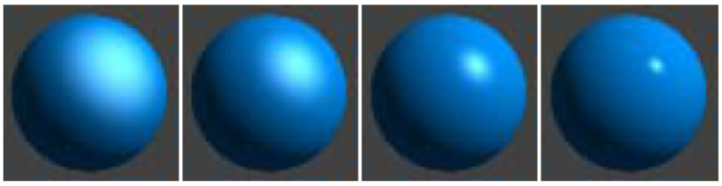
- **Modello di Phong**: distribuzione angolare del lobo speculare:

$$E\left(d\vartheta\right) = \cos^N\left(d\vartheta\right)$$

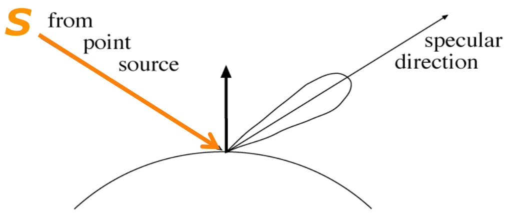


- Il coefficiente all'esponente *N* determina la "specularità" della superficie:

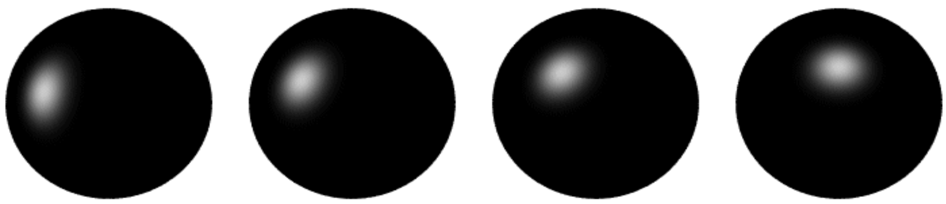
N crescente →



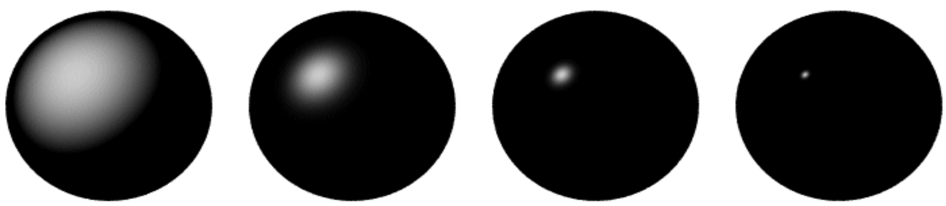
Specular reflection



Modello di Phong: $E\left(d\vartheta\right) = \cos^N\left(d\vartheta\right)$



al variare della direzione di illuminazione ***S***



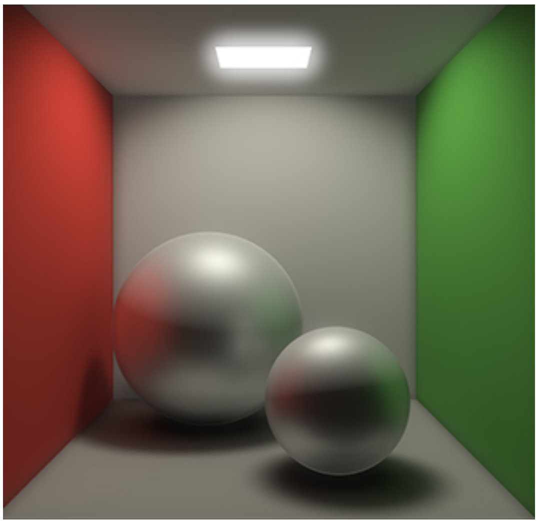
al variare dell'esponente ***N***

Modelli di riflessione superficiale

Modello generale
di riflessione superficiale

combinazione di **tre** termini:

- riflessione della radianza diffusa dalla sorgente (se non in ombra)
- riflessione speculare
- riflessione della radianza diffusa dall’ambiente



$$\mathrm{Vis}(\mathbf{S},x)=\begin{cases}1, & x \text{ 'vede' } \mathbf{S}\\ 0, & x \text{ in ombra}\end{cases}$$

$$E(x)=\underbrace{\rho(x)(\mathbf{N}\cdot\mathbf{S})\,\mathrm{Vis}(\mathbf{S},x)}_{\text{riflessione diffusa}}+\underbrace{\rho(x)A}_{\text{illuminaz. ambiente}}+\underbrace{M}_{\text{rifless. speculare}}$$

Generazione di un’immagine (image formation)

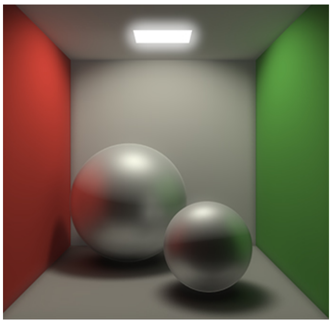
Aspetti radiometrici di formazione dell'immagine

- Modello radiometrico di camera
  - della lente
  - del sensore (calibrazione radiometrica, HDR)
- Modelli di riflessione superficiale
- **Applicazioni:**
  - Lightness constancy
  - Photometric stereo
  - BRDF – Helmholtz stereopsis

(Forsyth/Ponce: Capitolo 2)

Modelli di riflessione superficiale

Modello generale di riflessione superficiale
- riflessione diffusa (se non in ombra)
- riflessione della radianza d'ambiente
- riflessione speculare



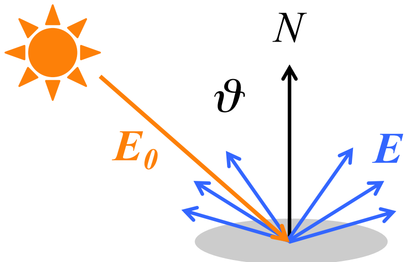
$$E(x) = \underbrace{\rho(x)(\mathbf{N}\cdot\mathbf{S})\overbrace{\mathrm{Vis}(\mathbf{S},x)}}_{\text{riflessione diffusa}} + \underbrace{\rho(x)A}_{\text{illuminaz. ambiente}} + \underbrace{M}_{\text{rifless. speculare}}$$

Modello semplificato: soltanto riflessione diffusa:

$$E(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})(N\cdot S) = \rho(\mathbf{x})E_0\cos\vartheta$$

Ambiguità albedo/illuminante:

data $E(x)$, non è possibile risalire alla albedo $\rho(x)$
- Anche in caso di modelli semplici (superficie Lambertiana, illuminatore distante),
  $E(x)$ è il prodotto di illuminante E_0 per la albedo $\rho(x)$



$$E(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_0) = \rho(\mathbf{x})E_0(\mathbf{x})$$

Lightness Constancy

Lightness Constancy: separazione albedo/illuminazione
- Ipotesi semplificative:
  - scena sostanzialmente frontale
  - camera *lineare* (calibrata): $Z(x) \to I(x) = k_{cam}E(x)$
  - superfici a riflessione diffusa
  - assenza di ombre

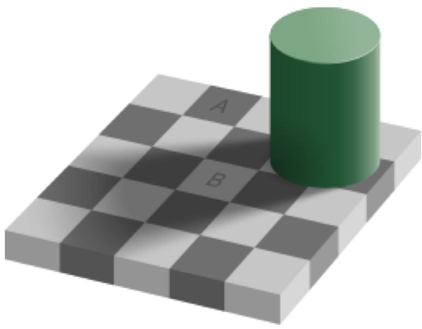
$$I(x) = k_{CAM}E(x)\rho(x) \quad \rightarrow \quad \boxed{\log I(x) = \log k_{CAM} + \log E(x) + \log\rho(x)}$$

Principio:
- albedo NON varia o varia bruscamente (es. 2 oggetti diversi, cambio colore),
- illuminazione varia lentamente (variazione geometria/normale)

Algoritmo "Retinex" *(Land & McCann, 1971)*:

1. calcolo gradiente del logaritmo dell'immagine: **G**(x,y)
2. se |**G**(x,y)| < **T** → **G**(x,y) = 0
3. integro **G**(x,y) → esponenziale → **I'(x)**

Nell'integrazione perdo la costante:
ASSUNZIONE: punto più brillante dell'immagine ➔ bianco

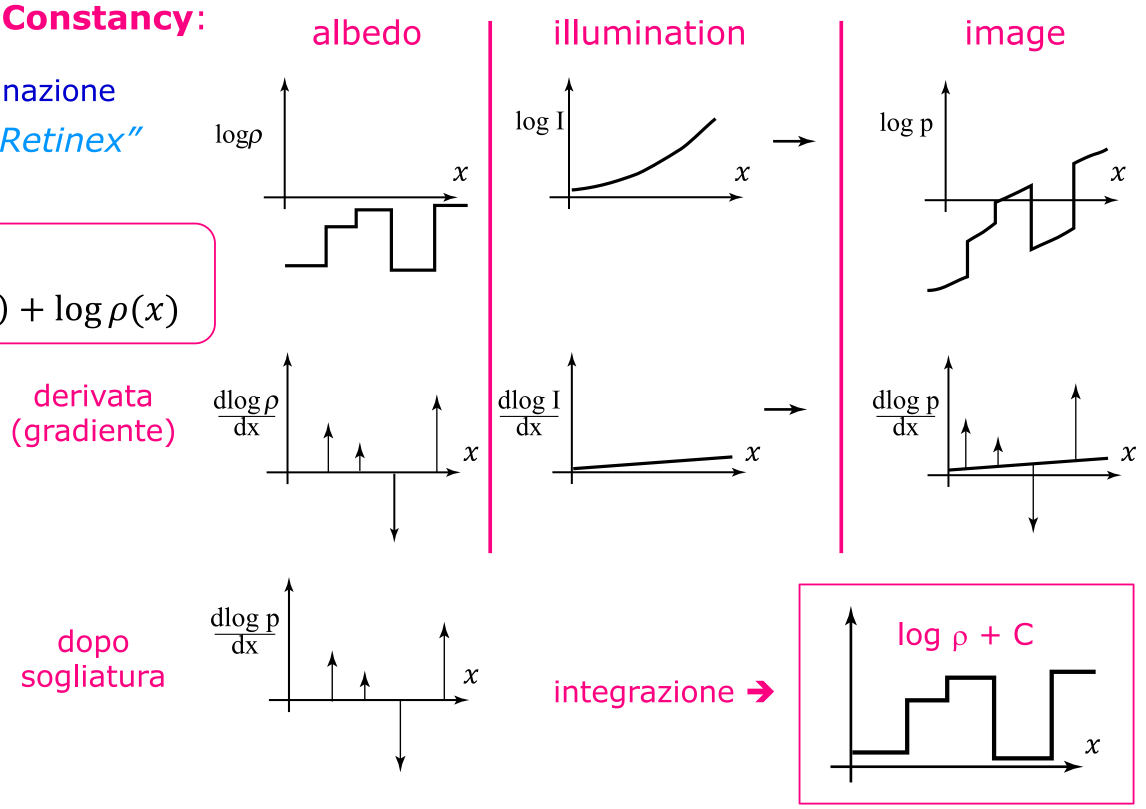


Lightness Constancy

Lightness Constancy:
separazione albedo/illuminazione

*Algoritmo "Retinex" in **1-D**:*

$$\log I(x) = k_l + \log E(x) + \log \rho(x)$$



Lightness Constancy

Esempio:

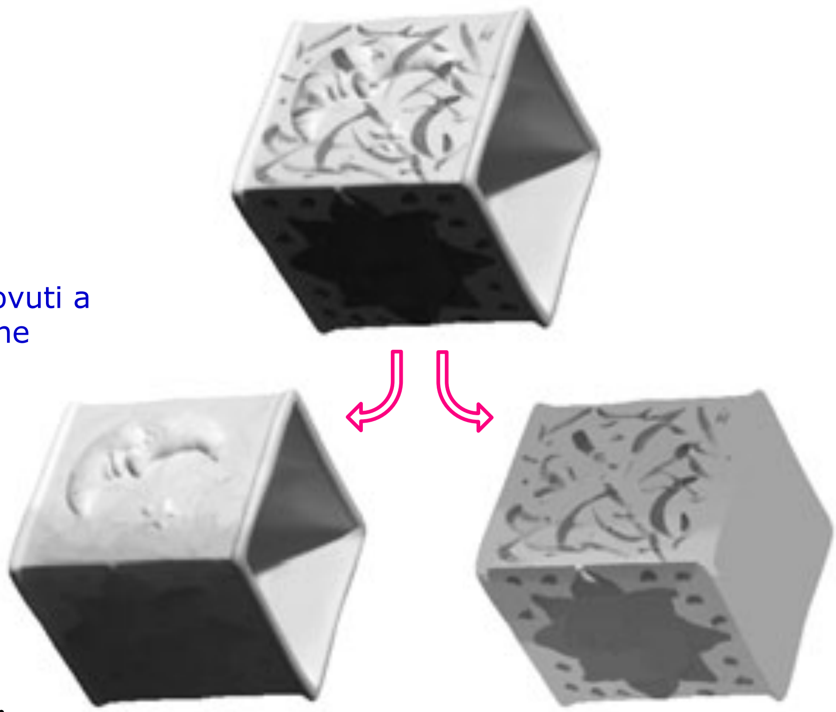
separazione albedo / shading

- ***albedo:*** $\boldsymbol{\rho(\mathrm{x})}$
  (decorazioni)

da

- ***shading:*** $\boldsymbol{E(\mathrm{x})\cos\vartheta(\mathrm{x})}$
  (variazioni della luminanza dovuti a illuminazione o al rilievo che ne cambia la normale locale)

luminanza originale



illluminazione + shading   albedo

Photometric stereo

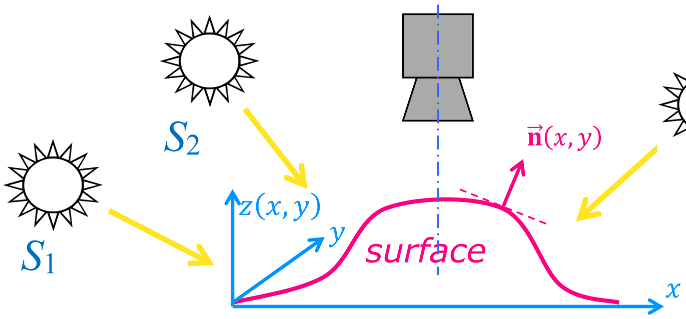
Photometric stereo – shape from multiple shaded images

Stima della forma 3D a partire da un modello di "shading" della superficie

- Ipotesi:
  - Oggetto da ricostruire con superficie Lambertiana (→ riflessione diffusa)
  - *"local shading model"*: ogni punto della superficie illuminato <u>solo dalla sorgente</u>
  - ***N*** sorgenti (illuminanti) illuminano da *N* direzioni note

  → ***N*** immagini dell'oggetto da ricostruire, illuminate con ciascuna delle ***N*** sorgenti, ma con la stessa posizione camera/oggetto
  - Camera model ≈ proiezione ortogonale

- **Obiettivo:** stima della forma 3D (altezza) dell'oggetto

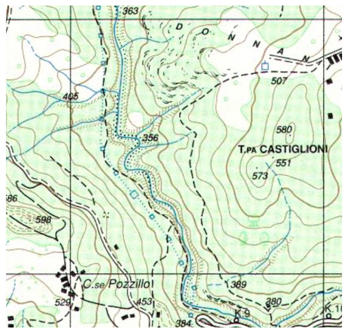


Surface model: Monge patch

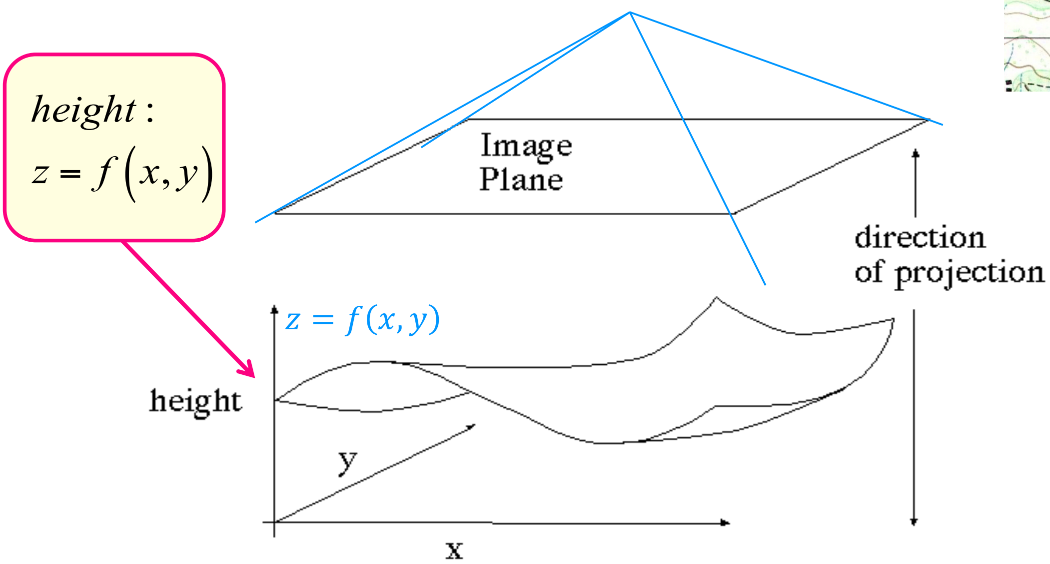
Camera/surface model

- Camera model semplificato ≈ proiezione ortogonale
  - piano immagine <u>coplanare</u> al piano di riferimento dell'oggetto (x, y)
- Surface model: **Monge patch**

  $z = f(x,y)$: *depth/height/distance map*



$z = f(x,y)$

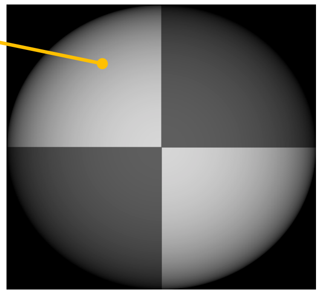


Photometric stereo

Ipotesi:

- *Local shading model:*
  → luminosità del pixel, $B(x,y)$: $B(x,y) = \rho(x,y)\left(\vec{\mathbf{n}}(x,y)\cdot \vec{S}_j\right)$ direzione sorgente j

- *Camera calibrata:*
  risposta lineare alla luminosità: $I(x,y) = k\,B(x,y)$



Date: – le direzioni delle N sorgenti $\vec{S}_j,\ j = 1..N$ e
– gli N valori di luminosità $I_j(x,y),\ \ j = 1..N$

Posso scrivere:

$$\begin{aligned} I_j(x,y) &= k\,B(x,y) \\ &= k\,\rho(x,y)\left(\vec{\mathbf{n}}(x,y)\cdot\vec{S}_j\right) \\ &= \left(\rho(x,y)\ \vec{\mathbf{n}}(x,y)\right)\cdot(k\vec{S}_j) = \vec{\mathbf{g}}(x,y)\cdot\vec{V}_j \end{aligned}$$

Dove:

$\vec{\mathbf{g}}(x,y) = \rho(x,y)\ \vec{\mathbf{n}}(x,y)$ dipende dalla superficie in (x,y) (albedo + normale), indipendente da j

$\vec{V}_j = k\vec{S}_j$ dipende dalla sorgente j-esima, $j = 1..N$

Photometric stereo

Per ogni pixel (x,y)
ho ***N*** immagini: $I_i(x,y)$

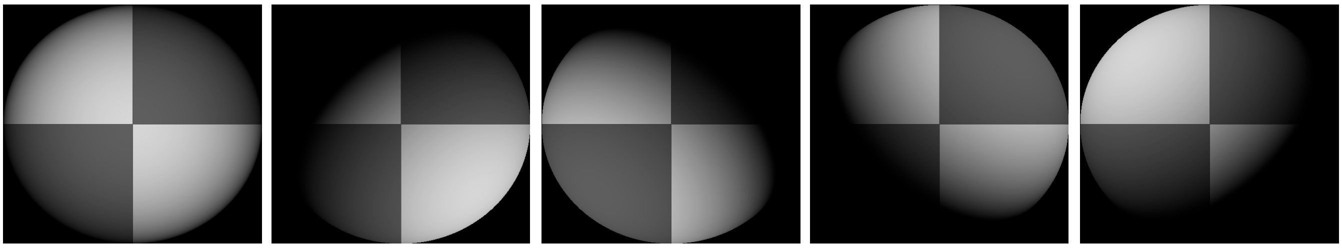
$$I_j(x,y) = \vec{\mathbf{V}}_j \cdot \vec{\mathbf{g}}(x,y)\ ; \quad j = 1..N$$

➔ possiamo scrivere N equazioni nelle 3 ingognite $\vec{\mathbf{g}}(x,y)$:

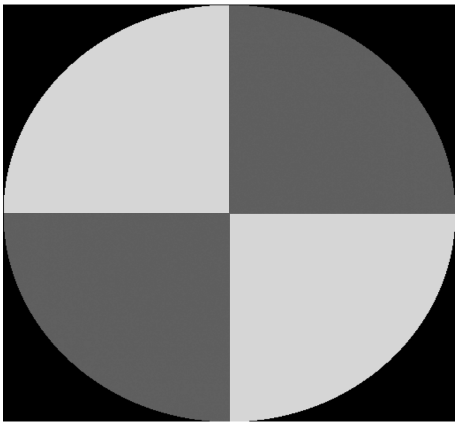
$$\begin{bmatrix} I_1(x,y) \\ I_2(x,y) \\ \vdots \\ I_N(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ \vdots \\ V_N^T \end{bmatrix} \mathbf{g}(x,y) = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ & \vdots & \\ v_{Nx} & v_{Ny} & v_{Nz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \\ g_z(x,y) \end{bmatrix}$$

Per N≥3 il sistema lineare è determinato → ottengo: $\boxed{\vec{\mathbf{g}}(x,y)}$

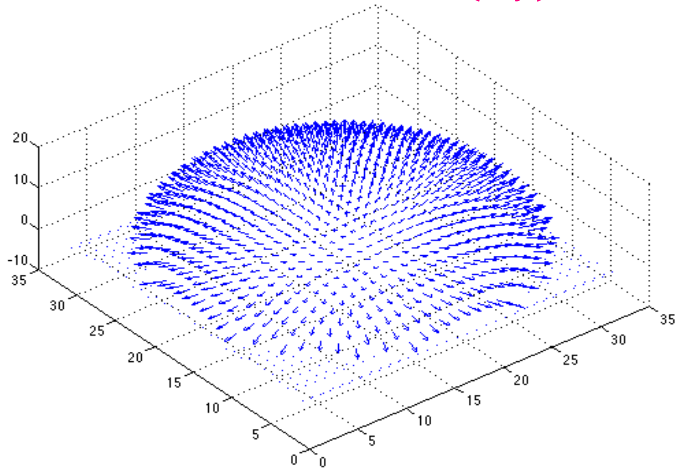
Poiché: $\mathbf{g}(x,y) = \rho(x,y)\ \vec{\mathbf{n}}(x,y)$ → $\boxed{\rho(x,y) = \left|\mathbf{g}(x,y)\right|, \quad \vec{\mathbf{n}}(x,y) = \dfrac{\mathbf{g}(x,y)}{\left|\mathbf{g}(x,y)\right|}}$
e poiché: $\|\vec{\mathbf{n}}\| = 1$:



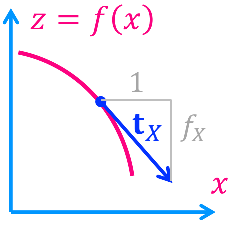
Albedo: $\boldsymbol{\rho}(x,y)$



Versore normale: $\vec{\mathbf{n}}(x,y)$



dalla normale $\vec{\mathbf{n}}(x,y)$ alla superficie $\mathbf{z}(x,y)$:



La superficie è definita come (Monge patch): $\mathbf{x} = \langle x, y, f(x,y) \rangle$

Le derivate parziali definiscono i vettori tangenti $\boldsymbol{t_X}$ e $\boldsymbol{t_Y}$:

- $\boldsymbol{t_X}$ e $\boldsymbol{t_Y}$ definiscono il piano tangente a $\boldsymbol{f(x,y)}$

$$f_X = \frac{\partial f}{\partial x}, f_Y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}_X = \langle 1, 0, f_X \rangle, \mathbf{t}_Y = \langle 0, 1, f_Y \rangle$$

La normale $\mathbf{n}(x,y)$ alla superficie è quindi:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_X \times \mathbf{t}_Y}{\|\mathbf{t}_X \times \mathbf{t}_Y\|} = \frac{1}{\|\mathbf{t}_X \times \mathbf{t}_Y\|} \det \begin{bmatrix} \mathbf{u}_X & \mathbf{u}_Y & \mathbf{u}_Z \\ 1 & 0 & f_X \\ 0 & 1 & f_Y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{n}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + 1}} [-f_X, -f_Y, 1]}$$

Ricordando che: $\vec{\mathbf{g}}(x,y) = \langle g_X(x,y), g_Y(x,y), g_Z(x,y) \rangle = \rho(x,y)\vec{\mathbf{n}}(x,y)$

$$\rightarrow N(x,y) = \frac{\mathbf{g}(x,y)}{\|\mathbf{g}(x,y)\|}$$

➔ Ottengo:

$$\boxed{\rho(x,y) = \|\vec{\mathbf{g}}(x,y)\| \; ; \quad f_X(x,y) = -\frac{g_X(x,y)}{g_Z(x,y)} \; ; \; f_Y(x,y) = -\frac{g_Y(x,y)}{g_Z(x,y)}}$$

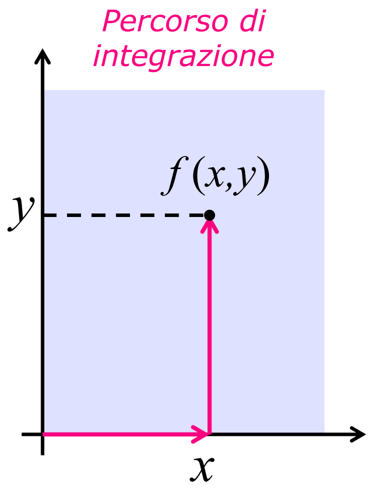
Dalle derivate parziali alla superficie:

- Date le derivate parziali:

$$f_X(x,y) = -\frac{g_X(x,y)}{g_Z(x,y)}\ ; \quad f_Y(x,y) = -\frac{g_Y(x,y)}{g_Z(x,y)}$$

- ricostruisco la superficie ***f*** a partire dalle derivate parziali:

$$f(x,y) = \int_0^x f_X(s,0)\,ds + \int_0^y f_Y(x,t)\,dt$$



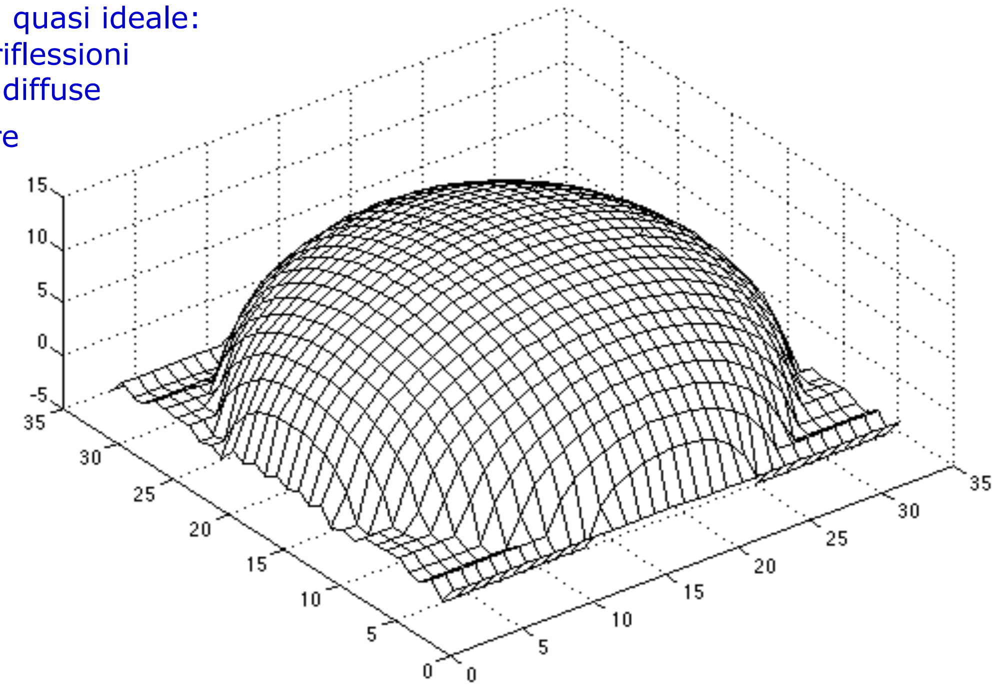
Integrabilità:

- Devo verificare che le derivate seconde miste siano uguali (in pratica, basta che siano molto simili):

$$f_{XY}(x,y) = \frac{df_X(x,y)}{dy} = f_{YX}(x,y) = \frac{df_Y(x,y)}{dx}$$

Limiti della tecnica "shape from shading":

- Modello di camera quasi ortografico
- Modello di luminosità quasi ideale: niente ombre, inter-riflessioni specularità, sorgenti diffuse
- Non possono mancare dati
- Integrazione non robusta
- Acquisizione di immagini multiple



Photometric stereo – integrazione della superficie

“shape from shading” con una sola immagine a colori

[Brostow, et al, "Video Normals from Colored Lights", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011]

Tecnica:

- illumino la scena con tre sorgenti:
  - **luce ROSSA**
  - **luce VERDE**
  - **luce BLU**
- acquisisco una sola immagine a colori
  …che poi separo nelle sue tre componenti R,G,B

➔ tre immagini: ***N*** = 3

- ogni componente dell'immagine "vede" soltanto la propria sorgente (R,G,B)
- Criticità: i sensori R,G,B non sono del tutto ortogonali…

Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF)

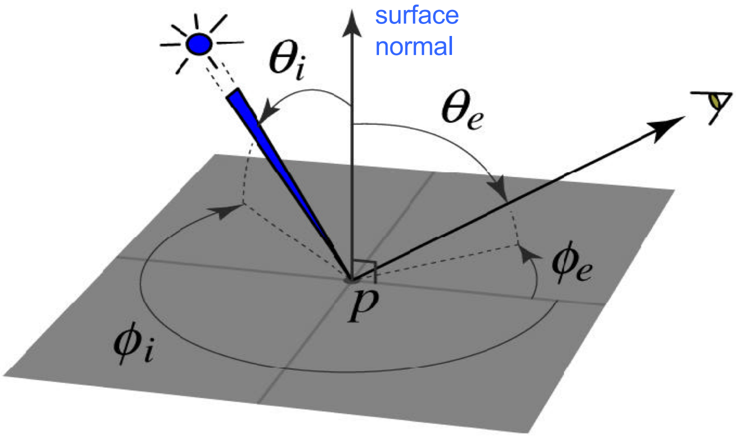
BRDF: modello generale di descrizione della **riflessione superficiale**

- Definisce la luminosità percepita da una direzione di osservazione, a causa di una sorgente illuminante da un’altra direzione

BRDF $\rho(\vec{\mathbf{i}}\,,\vec{\mathbf{e}})$: rapporto tra
– radianza in direzione uscente $\vec{\mathbf{e}}$ e
– irradianza in direzione incidente $\vec{\mathbf{i}}$

$$\rho(\vec{\mathbf{i}}\,,\vec{\mathbf{e}}) = \rho(\theta_i,\phi_i\,,\theta_i,\phi_e) = \frac{L_e(\theta_e\,,\phi_e)}{E_i(\theta_i\,,\phi_i)}$$

$$= \frac{L_e(\theta_e\,,\phi_e)}{L_i(\theta_i\,,\phi_i)\cos\theta_i}$$



Radianza totale uscente verso una direzione: $L(\vec{\mathbf{e}}) = L(\theta_e\,,\phi_e)$

→ integro i contributi da ogni direzione incidente

$$L_e(\theta_e,\phi_e) = \int_\Omega \rho(\theta_i,\phi_i,\theta_e,\phi_e)\, L_i(\theta_i,\phi_i) \cos\theta_i \, d\omega_i$$

***Ω:** angolo solido contenente la sorgente*

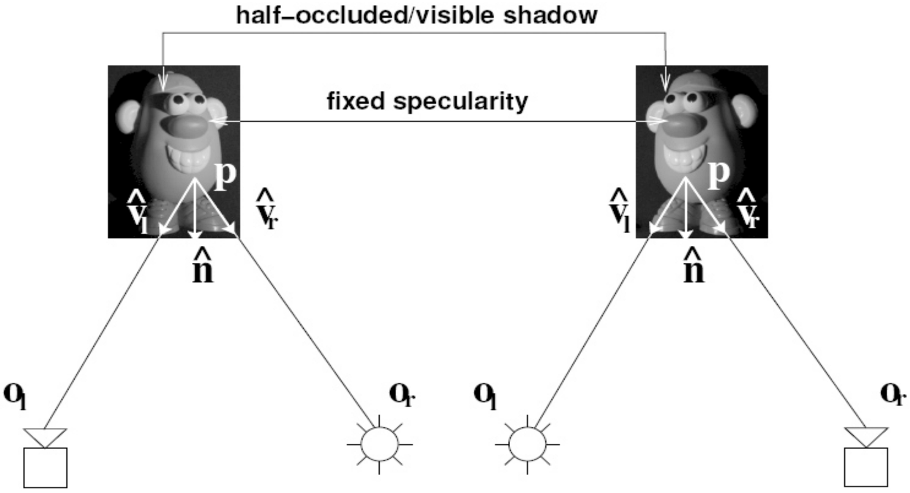
Helmholtz stereopsis:

ricostruzione 3D di superfici con **BRDF arbitrario**

- senza vincoli sul tipo di superficie (Lambertiana, speculare, con ombre, …)
- sfrutto la reciprocità della BRDF: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l)$

T. Zickler, P. Belhumeur, and D. Kriegman,
"Helmholtz Stereopsis: Exploiting Reciprocity for Surface Reconstruction", ECCV 2002.

IDEA: acquisizione stereo, scambiando di posto sorgente e camera



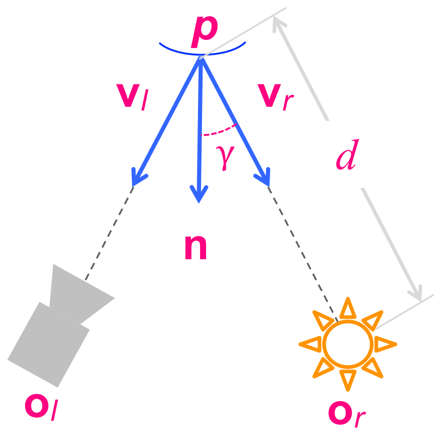
Helmholtz Stereopsis:

Consideriamo la sorgente in $\mathbf{O}_r$ e la camera in $\mathbf{O}_l$

La BRDF $\rho(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l)$ in questo caso è il rapporto:

- Radianza uscente $\boldsymbol{L}(\mathbf{v}_l)$ in direzione di camera
- Irradianza incidente $\boldsymbol{E}(\mathbf{v}_r)$ in direzione di illuminazione

$$\rho(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l) = \frac{L(\mathbf{v}_l)}{E(\mathbf{v}_r)}$$



- Radianza uscente $\boldsymbol{L}(\mathbf{v}_l)$:
  proporzionale all'irradianza osservata nell'immagine, I_l
  (camera calibrata radiometricamente – k_{cam})

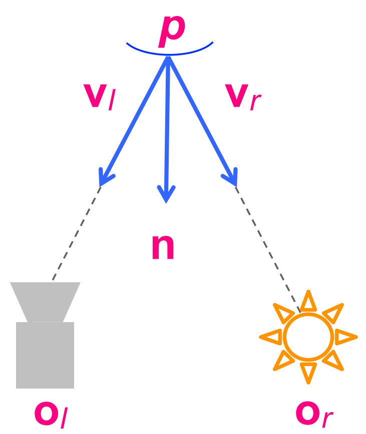
$$L(\mathbf{v}_l) = k_{cam}\, I_l$$

- Irradianza incidente $\boldsymbol{E}(\mathbf{v}_r)$:
  potenza S ricevuta sulla superficie,
  moltiplicata per $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r = \cos(\gamma)$
  e divisa per $d^2 = |\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2$

$$E(\mathbf{v}_r) = S\,\frac{\cos(\gamma)}{d^2} = S\,\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}$$

Ponendo $\eta = \frac{k_{cam}}{S}$, ottengo:

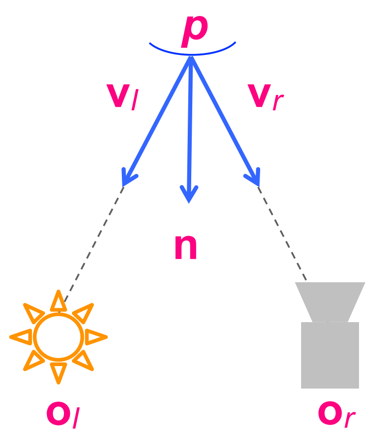
$$\boxed{\rho(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l) = \frac{k_{cam}\, I_l}{S\,\dfrac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}} = \frac{\eta\, I_l}{\dfrac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}}}$$



Acquisizione immagini

Per ogni coppia di direzioni
$(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r)$
effettuo 2 fotografie,
scambiando di posto
camera e **sorgente**
illuminante

(per *M* coppie)



$$\rho(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l) = \frac{\eta\, I_l}{\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}} \quad \xleftrightarrow{\text{uguali}} \quad \rho(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r) = \frac{\eta\, I_r}{\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_l}{|\mathbf{o}_l - \mathbf{p}|^2}}$$

Helmholtz reciprocity: $\rho(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r) = \rho(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l)$

Helmholtz stereopsis

Applico la reciprocità $\rho(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r) = \rho(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_l)$ e semplifico:

$$\frac{\eta\, I_l}{\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}} = \frac{\eta\, I_r}{\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_l}{|\mathbf{o}_l - \mathbf{p}|^2}} \quad \Rightarrow \quad I_l \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_l}{|\mathbf{o}_l - \mathbf{p}|^2} = I_r \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}$$

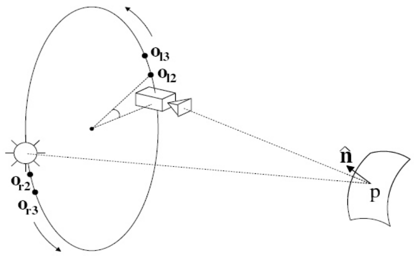
$$\rightarrow \left[\frac{I_l\, \mathbf{v}_l}{|\mathbf{o}_l - \mathbf{p}|^2} - \frac{I_r\, \mathbf{v}_r}{|\mathbf{o}_r - \mathbf{p}|^2}\right] \cdot \mathbf{n} = \boxed{\mathbf{w}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}} \qquad \left(\Rightarrow \quad [w_x(\mathbf{p}) \quad w_y(\mathbf{p}) \quad w_z(\mathbf{p})] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0\right)$$

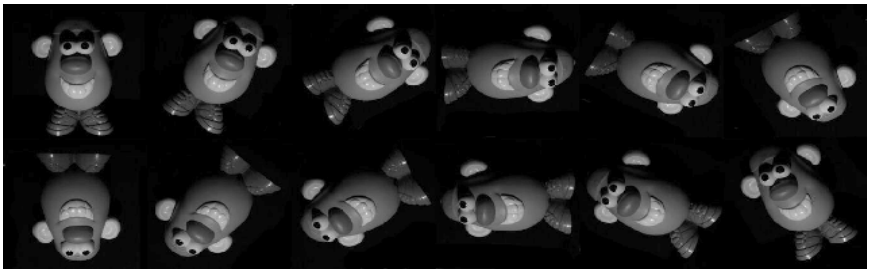
- Per ogni punto considerato, $\mathbf{w}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$ fornisce un vincolo sulla distanza del punto $\mathbf{p}$ e sulla sua normale $\mathbf{n}$ → 6 incognite/punto
- Per ogni punto considerato, otteniamo un'equazione (non lineare) di vincolo per ogni coppia sorgente/camera (*M* coppie sorgente/camera → ***M*** equazioni/punto)

➔ Per ***M***>6, tali vincoli permettono di arrivare alla ricostruzione 3D della superficie

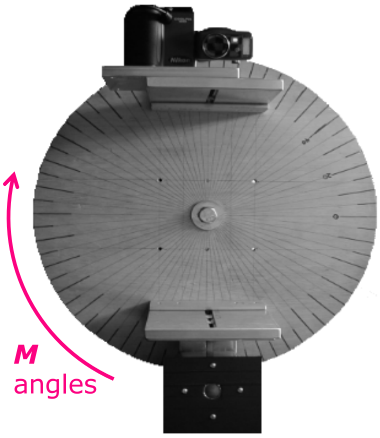
Proprietà: *nessuna ipotesi a priori sul modello di riflessione della superficie*

Example results





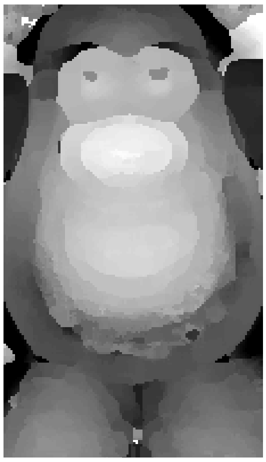
reciprocal stereo pairs

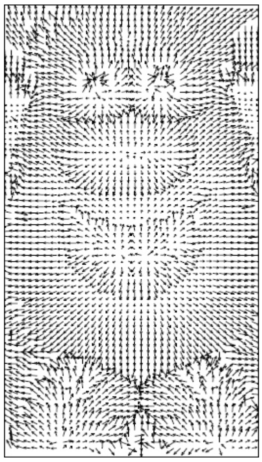


M
angles

custom stereo rig

original image





recovered depth map and normal field