



Corso di Visione Artificiale

Laurea Magistrale in Informatica (F94)

Docenti:

Raffaella Lanzarotti, Federico Pedersini

*Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Milano*

Informazioni generali



❖ Orario

lunedì 13:30 ÷ 16:30 Aula OMEGA
venerdì 13:30 ÷ 16:30 Aula OMEGA
streaming (se necessario): [link Zoom sulla pagina web del corso \(lezioni\)](#)

❖ Sito web del corso: homes.di.unimi.it/pedersini/CV/index.html

❖ Ricevimento:

➤ *al termine di ogni lezione, o su appuntamento (quando non c'è lezione)*

❖ Materiale didattico:

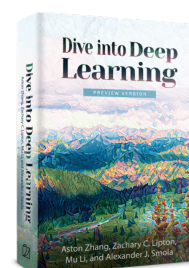
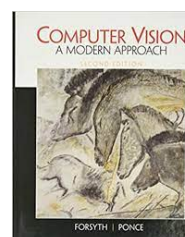
Testi:

- D.A. Forsyth, J. Ponce, *Computer Vision – A Modern Approach – 2e*, Pearson (disponibile online)
- AA.VV. – *Dive into Deep Learning* – (online: <https://d2l.ai>)

Slide / materiale / videolezioni: sul sito del corso

❖ Esami:

- *Obbligatorio: prova scritta*
- *Facoltativo: progetto di Visione Artificiale (→ tesi)*





Programma

- ❖ Image formation
 - *Modello geometrico di camera e calibrazione*
 - *Modelli di luminosità (radiometrici)*
 - *Modelli di colore*
- ❖ "Early vision"
 - *Filtraggio lineare*
 - *Estrazione di features*
 - *Stereopsis (visione binoculare)*
 - *Structure from Motion (multi-view)*
 - *Ricostruzione 3D di scena*
- ❖ Machine learning in visione artificiale
 - *Linear Neural Networks*
 - *Multilayer perceptrons*
 - *Deep Learning Computation*
 - *Convolutional Neural Networks*
 - *Recurrent Neural networks*
 - *Graph Neural Networks*
 - *Bayesian Neural Networks*

Federico Pedersini

Raffaella Lanzarotti

level of vision



1. Processo di generazione di un'immagine (Image Formation)

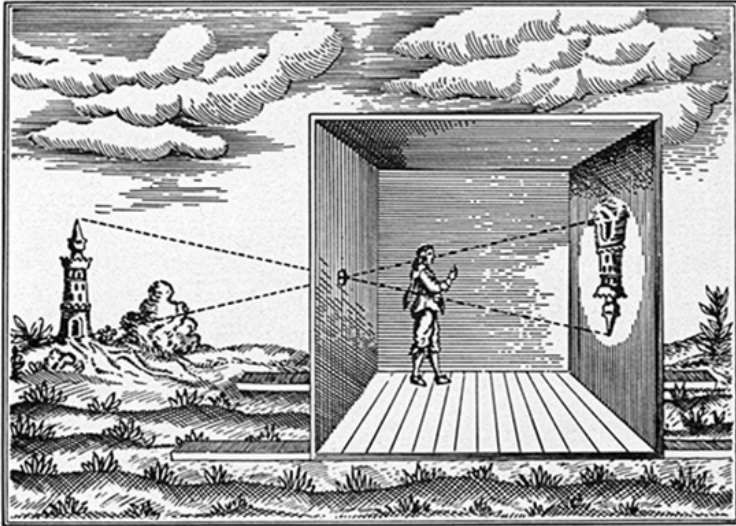
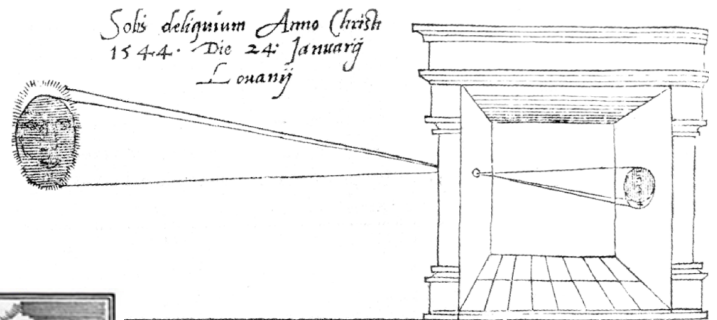
(Forsyth/Ponce: Capitolo 1)

Modello geometrico della camera
modello di camera ideale ("pinhole")



"Camera obscura"

- Brunelleschi / Leonardo da Vinci, 1544
- *sistema di generazione di una proiezione prospettica della scena antistante (come l'occhio umano)*



Proiezione prospettica:

funzione che mappa
punti di uno spazio 3D
in
punti su un piano 2D
(piano immagine)

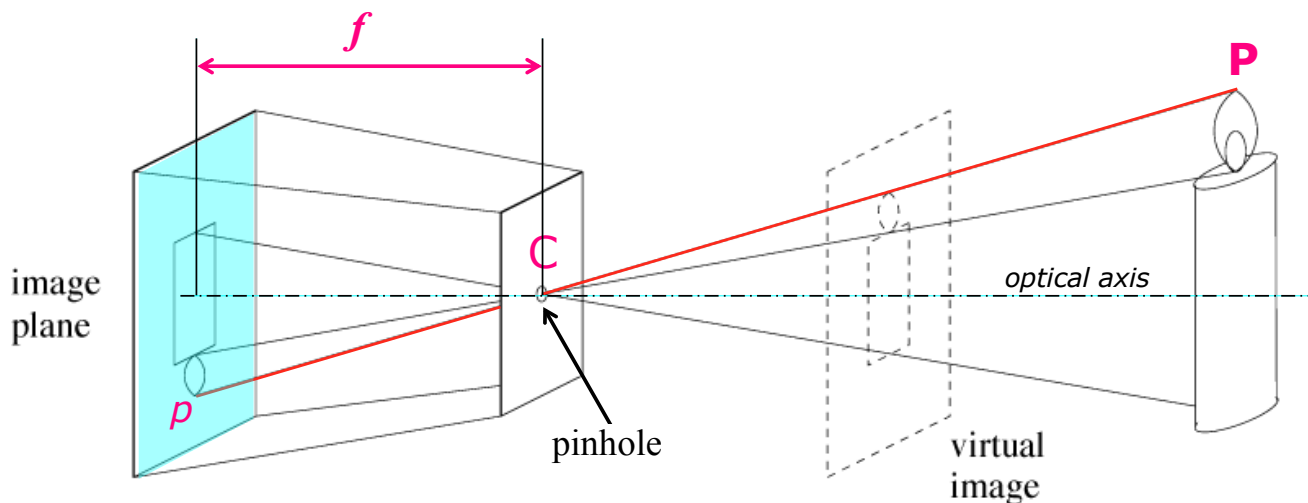
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Prospettiva – il modello "pinhole"



Modello di camera "pinhole":

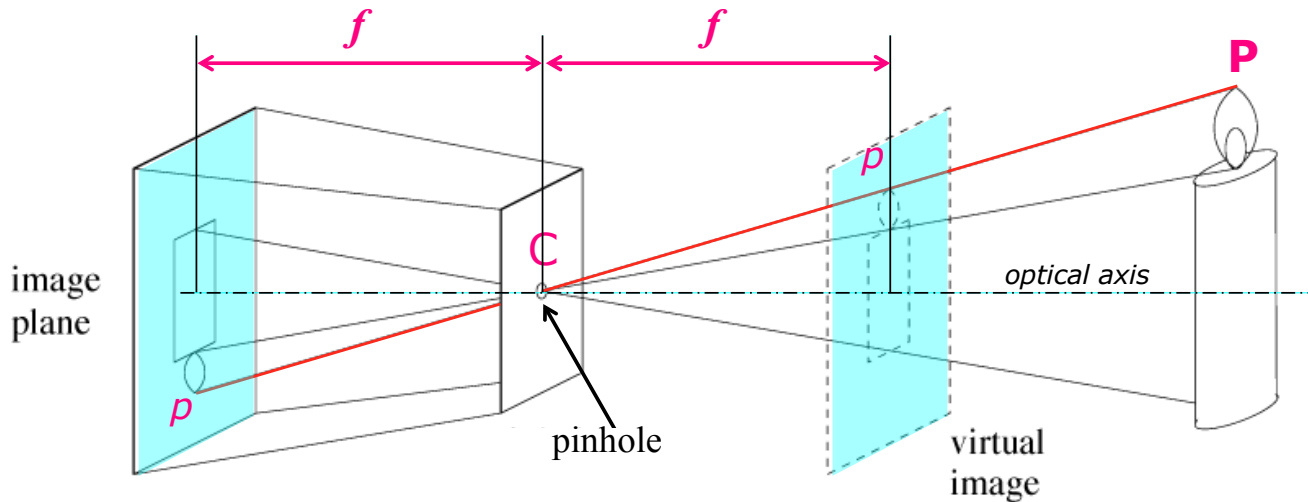
- ❖ *da ogni punto della scena **P**, soltanto il raggio passante per **P** e per il foro **C** (idealmente puntiforme) raggiunge il piano immagine in **p***



Pinhole: immagine reale/virtuale

- ❖ è geometricamente equivalente considerare l'immagine reale (rovesciata) o quella virtuale (non rovesciata), simmetrica rispetto al pinhole **C**

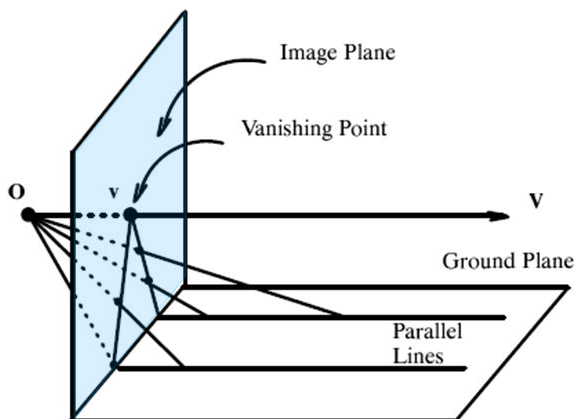
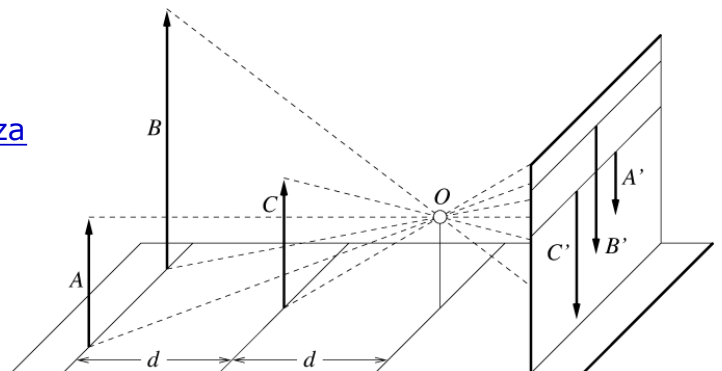
f – lunghezza focale: distanza pinhole/piano immagine

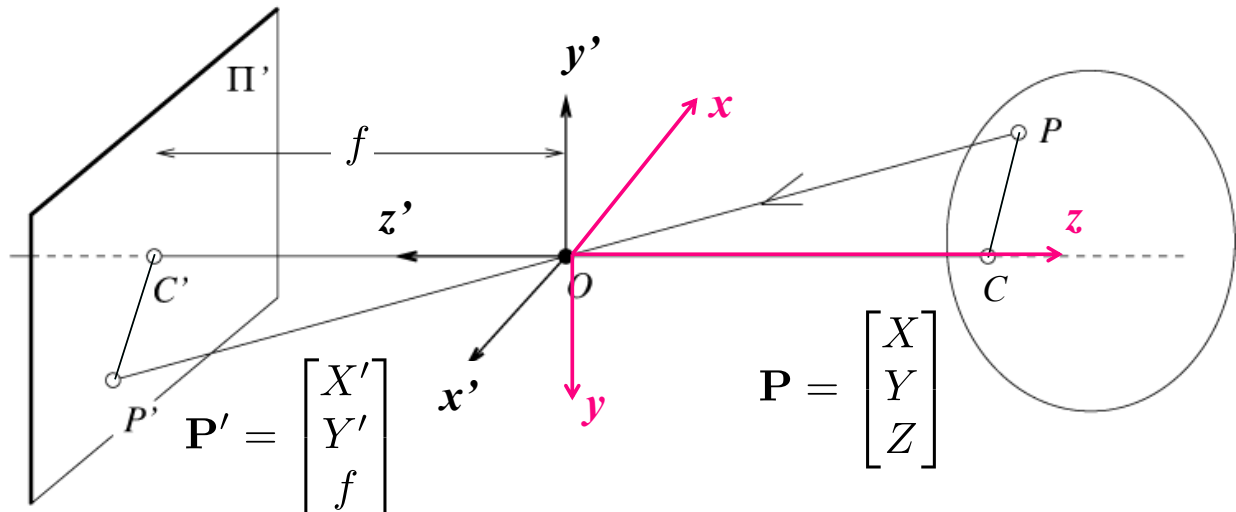


Proprietà della prospettiva (proiezione centrale)

Proprietà della prospettiva:

- ❖ Dimensioni nell'immagine inversamente proporzionali alla distanza
- ❖ Le **linee rette** rimangono rette
- ❖ Gli **angoli non** si conservano
Linee parallele → linee convergenti

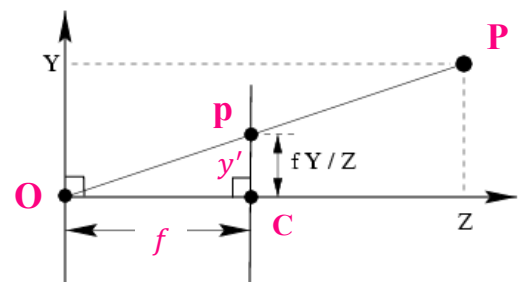
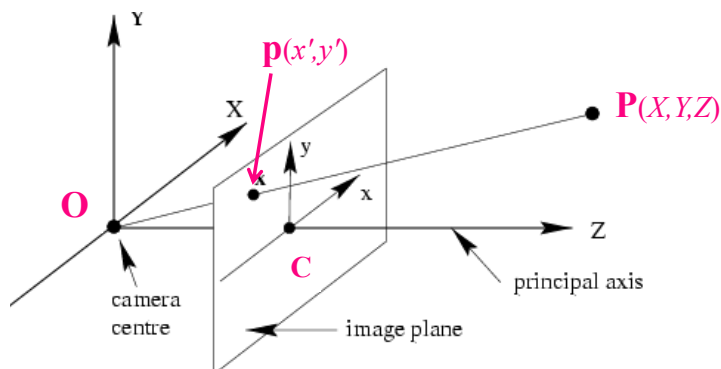




Modello matematico:

❖ **i triangoli OPC e OP'C' sono simili**

Equazioni prospettiche: $X' = f \frac{X}{Z}$; $Y' = f \frac{Y}{Z}$

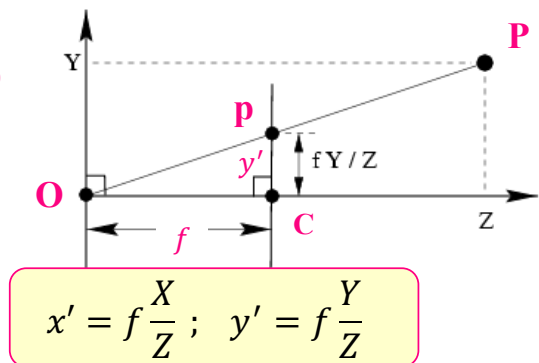
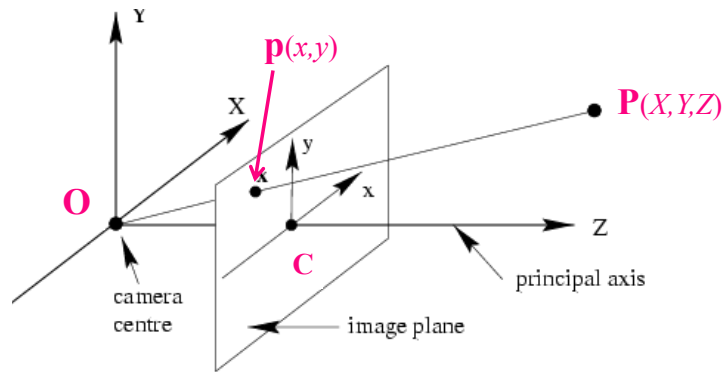


Modello camera prospettica "pinhole":

Definita matematicamente da:

- ❖ **Centro ottico O** (camera center)
- ❖ **Asse ottico** (optical/principal axis)
- ❖ **Distanza focale f**
- ❖ **Piano immagine:** ortogonale all'asse ottico, a distanza **f** dal centro ottico **O**
- ➔ **Punto principale (centro ottico) C:** intersezione asse ottico con piano immagine

$x' = f \frac{X}{Z}$; $y' = f \frac{Y}{Z}$



- ❖ dato \mathbf{P} di coordinate $\langle X, Y, Z \rangle$ nel sistema di riferimento 3D della camera: $OXYZ$
- ❖ dato \mathbf{p} di coordinate $\langle x, y \rangle$ nel sistema di riferimento 2D piano immagine: Cxy

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f/Z & 0 & 0 \\ 0 & f/Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} : \quad \mathbf{p} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$$

→ la **proiezione prospettica** è esprimibile come **prodotto matriciale**

Proiezione prospettica in coordinate omogenee



È comodo sfruttare la **geometria proiettiva**:

Coordinate omogenee (spazi proiettivi): $\mathbf{P} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}}$

- ❖ in coordinate omogenee, due vettori (punti) sono **equivalenti** se sono **uguali a meno di un fattore di scala**:

$$\mathbf{x}_N = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathfrak{R}_N \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}_N = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N, \lambda) = \lambda (x_1, x_2, \dots, x_N, 1) = \lambda \bar{\mathbf{x}}_N$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_N \in \mathfrak{R}_{N+1} \setminus \mathbf{0}_{N+1}, \quad \lambda \neq 0$$

Corrispondenza tra spazi euclidei / proiettivi:

- ❖ **2D**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_2 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{P}_2 = \mathfrak{R}_3 \setminus \mathbf{0}_3, \quad \lambda \neq 0$$

- ❖ **3D**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_3 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{P}_3 = \mathfrak{R}_4 \setminus \mathbf{0}_4, \quad \lambda \neq 0$$

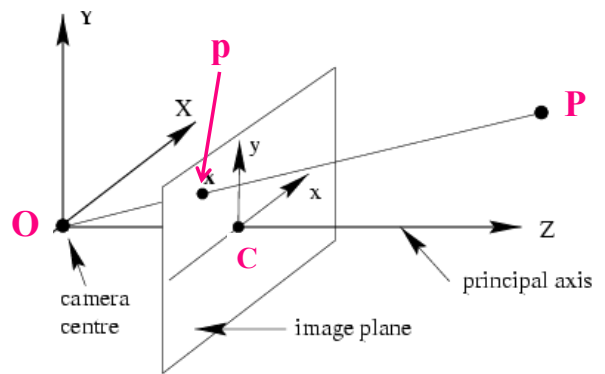


Proiezione prospettica in coordinate omogenee:

spazio euclideo

spazio proiettivo

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{Z}X \\ \frac{f}{Z}Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{P}}$$

fattore di scala: Z

Proiezione: prodotto matriciale \mathbf{K} [3x4]

In coordinate omogenee la proiezione prospettica diventa **lineare!**

Proiezione prospettica – modello più completo di camera

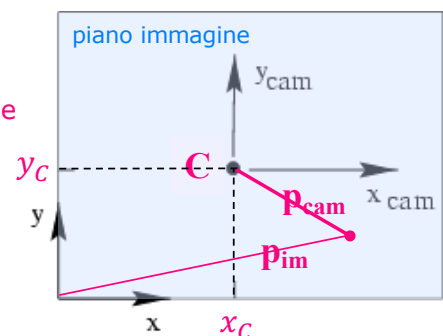


1. Coordinate Immagine:

- Coordinate-camera (3D): \mathbf{p}_{cam} – solidali con il **pinhole**
- Coordinate-immagine (2D): \mathbf{p}_{im} – solidali con piano immagine (sensore camera)

Proprietà coordinate-immagine:

- assi paralleli agli **assi del sensore**
- unità di misura: **pixel** → possono coincidere con {row, col} della matrice immagine



2. Punto Principale (C) o centro ottico dell'immagine

- intersezione piano immagine/asse ottico – coordinate: $\langle x_c, y_c \rangle$

$$\mathbf{p}_{im} = \mathbf{p}_{cam} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{p}}_{im} = \begin{bmatrix} x + x_c \\ y + y_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX/Z + x_c \\ fY/Z + y_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} \xrightarrow{\text{proiezione}} \tilde{\mathbf{p}}_{im} = \begin{bmatrix} \frac{fX}{Z} + x_c \\ \frac{fY}{Z} + y_c \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} fX + x_c Z \\ fY + y_c Z \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_c & 0 \\ 0 & f & y_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_I \cdot \tilde{\mathbf{P}}$$

\mathbf{K}_I : Matrice di calibrazione (matrice intrinseca)

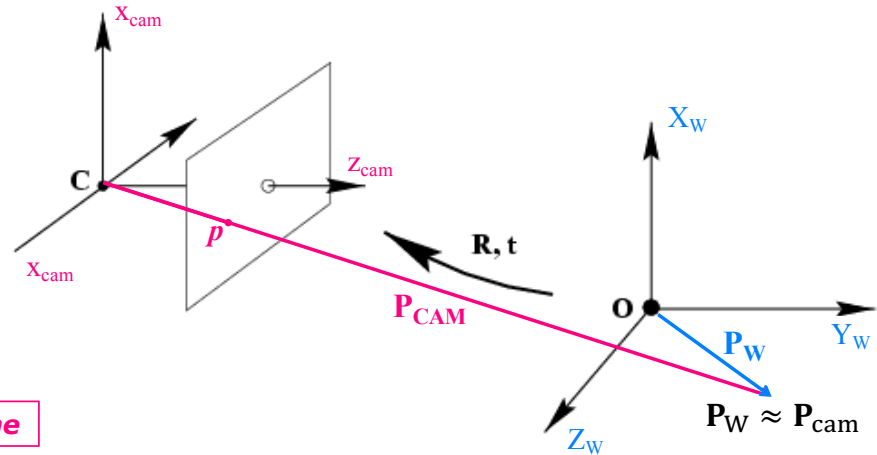


3. Cambio di sistema di riferimento (Camera coordinates → World coordinates)

- Il modello proiettivo comprende anche il cambio di sistema di riferimento:
 - da: **camera coordinates** – sistema di riferimento 3D solidale con la camera
 - a: **world coordinates** – sistema di riferimento 3D solidale con la scena ripresa

- Cambio di sistema: **roto-traslazione 3D**

$$\mathbf{P}_{\text{cam}} = \begin{bmatrix} x_{\text{cam}} \\ y_{\text{cam}} \\ z_{\text{cam}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_W = \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{bmatrix}$$



rotazione **traslazione**

$$\mathbf{P}_{\text{cam}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_W + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{cases} x_{\text{cam}} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{P}_W + t_x \\ y_{\text{cam}} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{P}_W + t_y \\ z_{\text{cam}} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{P}_W + t_z \end{cases}$$

Matrici di rotazione



R: matrice di rotazione 3D composizione di 3 rotazioni, sui 3 assi x,y,z

- descritta da 3 angoli di rotazione (angoli di Eulero)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\varphi, \vartheta, \rho) = \mathbf{R}(\varphi) \cdot \mathbf{R}(\vartheta) \cdot \mathbf{R}(\rho) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & -\sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\rho) & -\sin(\rho) \\ 0 & \sin(\rho) & \cos(\rho) \end{bmatrix}$$

rotazione attorno asse **Z**

rotazione attorno asse **Y**

rotazione attorno asse **X**

← Ordine delle rotazioni →

Proprietà di R:

- L'ordine di rotazione non è commutativo!
- Matrice **ortonormale**
 - Determinante unitario
 - Righe e colonne ortonormali fra loro
- Inversa = Trasposta**

$$\det(\mathbf{R}) = 1; \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = 1, \quad \mathbf{r}_i = [r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}]$$

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0, \quad i \neq j$$

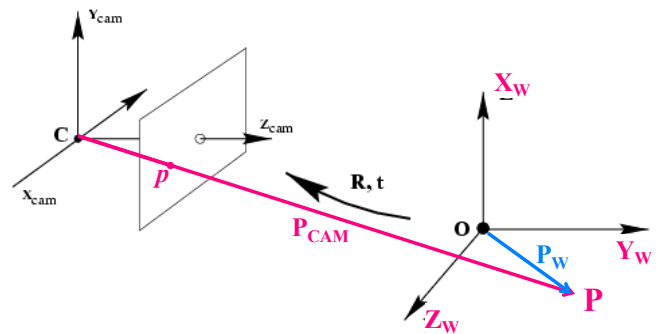


Relazione geometrica tra Camera coordinates e World coordinates
in coordinate omogenee:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{CAM} = \begin{bmatrix} X_{CAM} \\ Y_{CAM} \\ Z_{CAM} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W = \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

E: Matrice di rototraslazione
(matrice **estrinseca**)
[4 × 4]



Modello di proiezione prospettica completo



Modello di camera completo, in coordinate proiettive

Combinando tutte le relazioni, otteniamo il **modello completo di proiezione prospettica** (in coordinate omogenee):

❖ Roto-traslazione:

$$\tilde{\mathbf{P}}_W \mapsto \tilde{\mathbf{P}}_{CAM} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W = \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W$$

❖ Proiezione prospettica:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{CAM} \mapsto \tilde{\mathbf{p}}_{IM} = \begin{bmatrix} x_{IMM} \\ y_{IMM} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_C & 0 \\ 0 & f & y_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{CAM} = \mathbf{K}_I \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{CAM}$$

❖ **Modello proiettivo completo:**

$$\tilde{\mathbf{P}}_W \mapsto \tilde{\mathbf{p}}_{IM} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_C & 0 \\ 0 & f & y_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W = \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W$$

Matrice di **calibrazione intrinseca** [3x4]

Matrice di **rototraslazione estrinseca** [4x4]

Matrice di PROIEZIONE [3x4]



Modello completo di proiezione prospettica, in coordinate omogenee:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{IM} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_C & 0 \\ 0 & f & y_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \cdot \tilde{\mathbf{P}}_w = \mathbf{M}(\xi) \cdot \tilde{\mathbf{P}}_w$$

Modello lineare, funzione di 11 parametri ($\mathbf{M}_{3 \times 4}$, a meno di un fattore di scala)...
...ma solo 9 parametri indipendenti:

$$\xi = [\mathbf{R}, \mathbf{T}, f, \mathbf{C}] = [\varphi, \vartheta, \rho, t_x, t_y, t_z, f, x_C, y_C]$$

Parametri estrinseci: funzione della posizione reciproca camera-scena

- ❖ Rotazione: angoli di Eulero: $\mathbf{R} = [\varphi, \theta, \rho]$
- ❖ Traslazione: vettore di traslazione: $\mathbf{T} = [t_x, t_y, t_z]$

Parametri intrinseci: funzione delle caratteristiche della camera

- ❖ Lunghezza focale: f
- ❖ Posizione del centro ottico C: x_C, y_C



1. Generazione di un'immagine (Image Formation)

Modello geometrico di camera

modello geometrico di camere reali

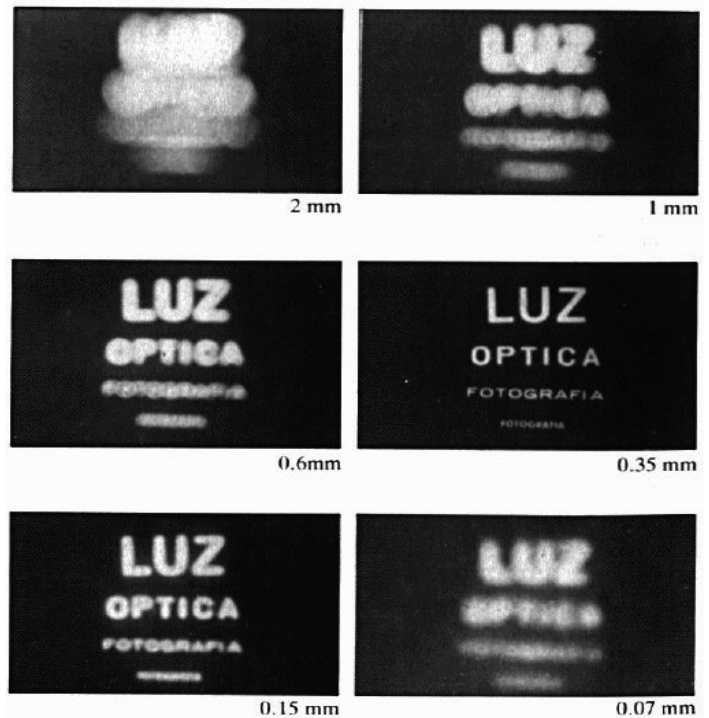
Scelta del diametro del pinhole

diminuendolo:

- ❖ immagine sempre più a fuoco (ma c'è un limite: la diffrazione)
- ❖ insufficiente energia luminosa

aumentandolo:

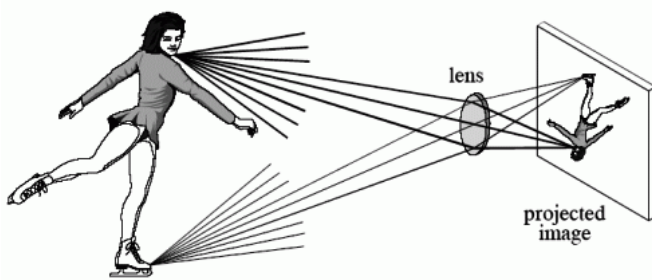
- ❖ luminosità crescente
- ❖ immagine sempre più sfuocata



<https://www.youtube.com/watch?v=m5VVI0EhoJY>

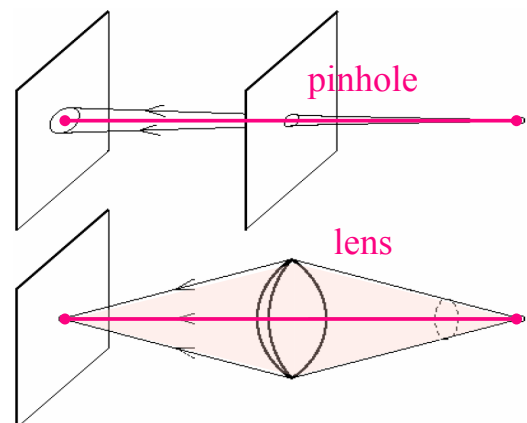
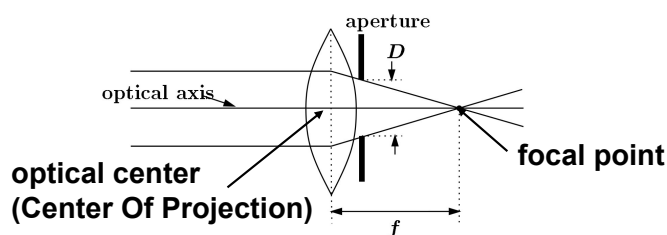
Pinhole vs. Lens

Un **pinhole** cattura un raggio di luce (linea retta oggetto-immagine)
 Una **lente** cattura **tutti i raggi** di luce che raggiungono la sua apertura



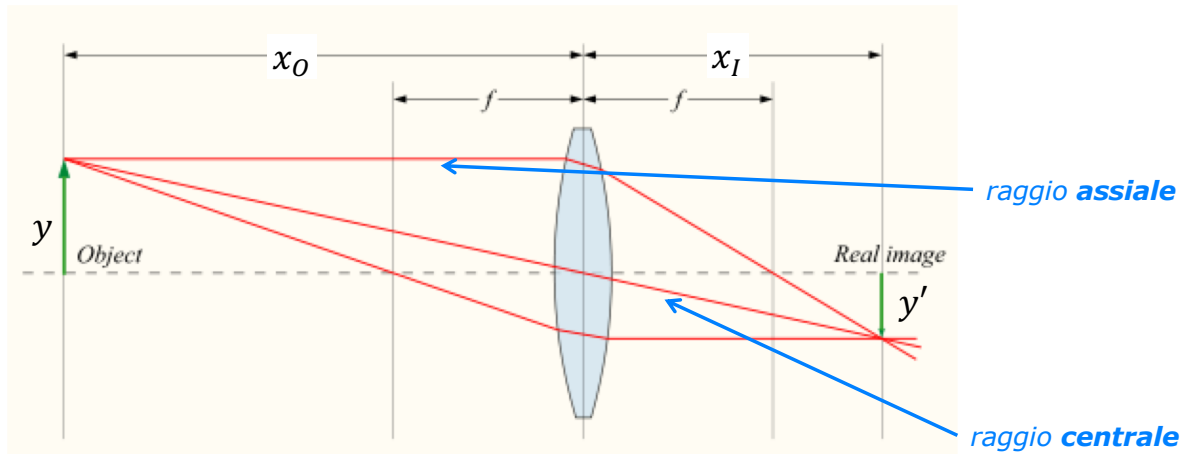
Apertura di una lente: rapporto **diametro/lunghezza focale**

esempio: Apertura: $f/2 \rightarrow D = f/2$



Apertura: $A = \frac{D}{f}$

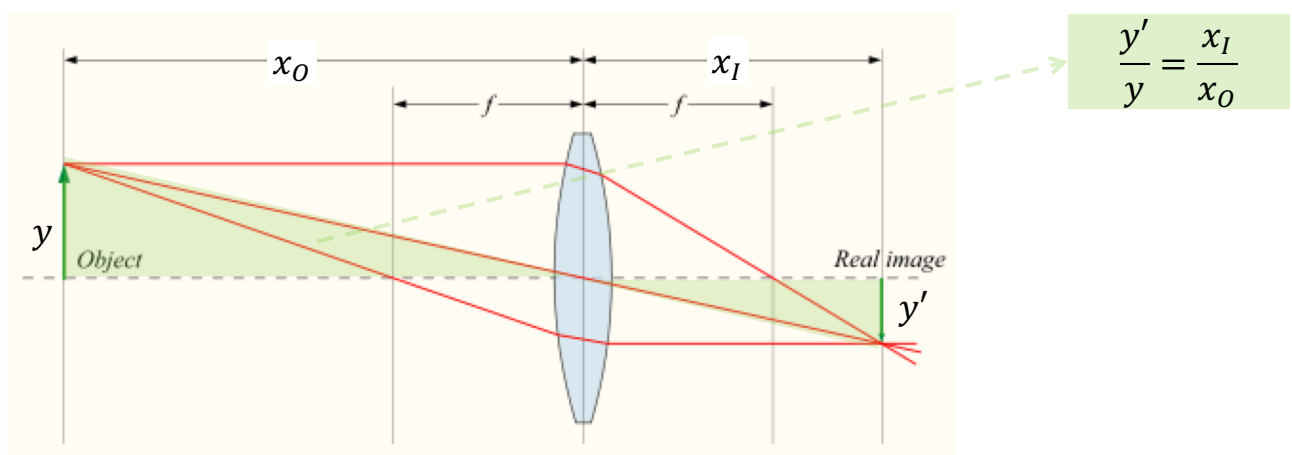
Modello geometrico di una "lente sottile" (lente convergente)



Costruzione immagine:

- ❖ il **raggio centrale**, che passa per il centro della lente, non viene deviato
- ❖ il **raggio assiale** parallelo all'asse ottico viene deviato e passa per il fuoco

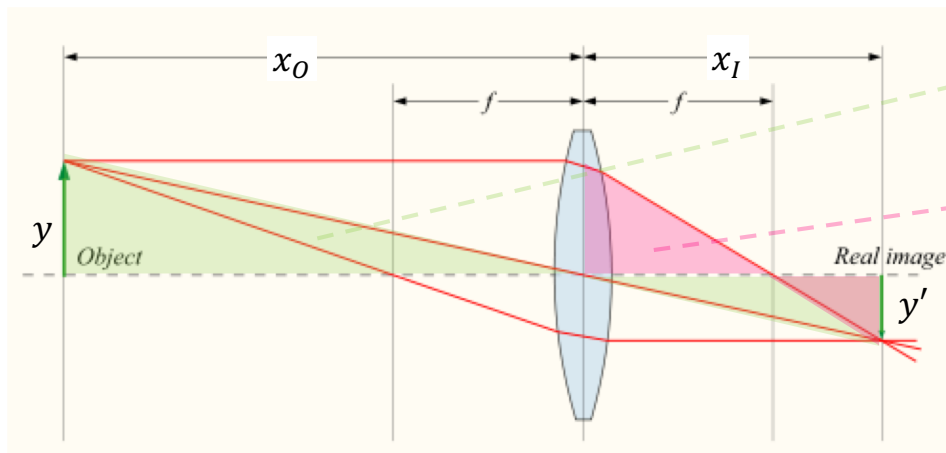
Modello geometrico di una "lente sottile" (lente convergente)



Costruzione immagine:

- ❖ il **raggio centrale**, che passa per il centro della lente, non viene deviato
- ❖ il **raggio assiale** parallelo all'asse ottico viene deviato e passa per il fuoco

Modello geometrico di una "lente sottile" (lente convergente)



$$\frac{y'}{y} = \frac{x_I}{x_0}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x_I - f}{f}$$

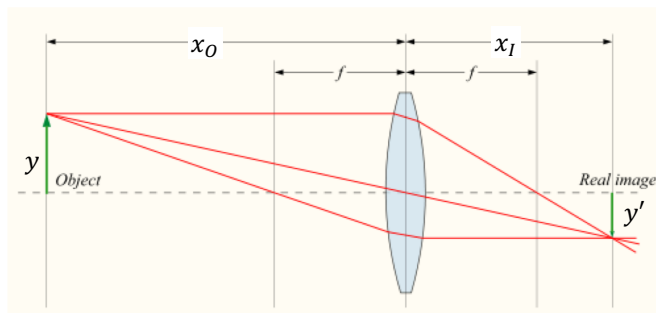
Equazione di una
lente sottile

Eguagliando le due equazioni e dividendo per x_I :

$$\frac{x_I}{x_0} = \frac{x_I - f}{f} = \frac{x_I}{f} - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_I}$$

$$\frac{1}{x_I} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f}$$

Modello geometrico di lente sottile



Equazione di una
lente sottile

$$\frac{1}{x_I} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f}$$

In sintesi: il modello geometrico non cambia, ma con la lente: $f \rightarrow x_I$
dove x_I dipende dalla distanza dell'oggetto x_0 : $x_I = f(x_0)$

Esempi:

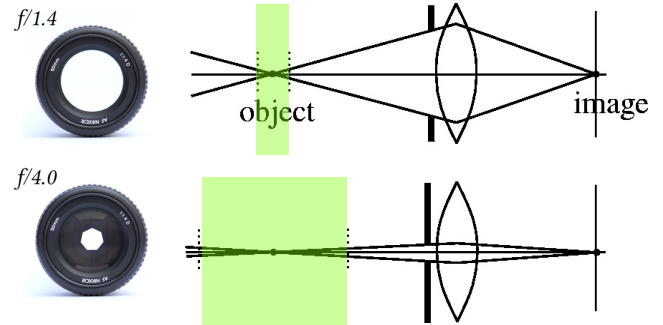
$$x_0 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_I} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad x_I = f$$

$$x_0 = 2f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_I} + \frac{1}{2f} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad x_I = 2f$$

→ con una **lente** al posto di un pinhole **non tutto è a fuoco** (con un pinhole, sì)

Profondità di campo: l'intervallo di distanze $x_{near} - x_{far}$ considerabili a fuoco nell'immagine

- ❖ **Minore** è l'apertura, **maggiore** è la **profondità di campo**
- ❖ L'apertura (e quindi la profondità di campo) si regola con un **diaframma** posto vicino alla lente



Apertura: $D=f/1.4$



Apertura: $D=f/4$



Apertura: $D=f/22$ (Wikipedia)

Aberrazioni ottiche di una lente

- ❖ una lente reale non si comporta esattamente come una lente sottile
- **deviazioni dal modello di lente sottile**

Aberrazione sferica , Coma , Astigmatismo

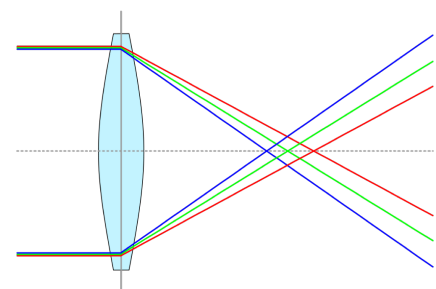
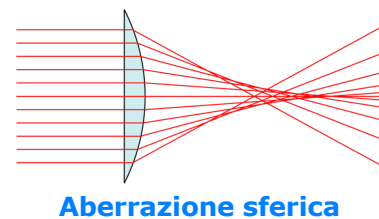
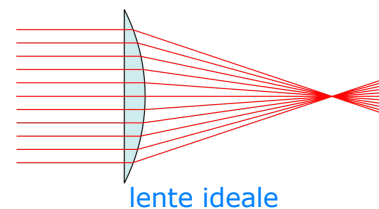
- non tutti i raggi che attraversano la lente passano per il fuoco
- **EFFETTO: messa a fuoco imperfetta**

Aberrazione cromatica

- comportamento della lente diverso per colori (lunghezze d'onda) differenti
- **EFFETTO: separazione dei colori**

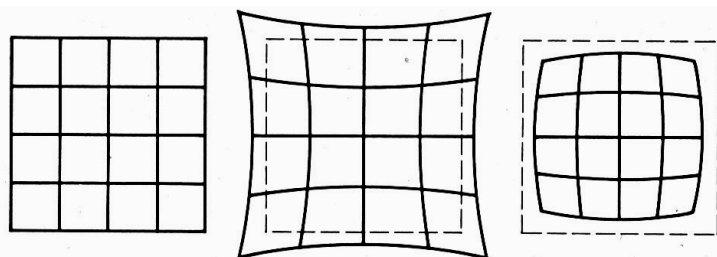
Distorsione

- ingrandimento della lente cambia al variare della distanza dal punto principale
- **EFFETTO: deformazione dell'immagine!**



Distorsione radiale

- ❖ **ingrandimento** della lente cambia al variare della **distanza dal punto principale**
- ❖ **EFFETTO:** **deformazione dell'immagine**
- ❖ L'unica tra le aberrazioni di una lente, che **non** causa **sfuocamento**, bensì uno **spostamento** del punto immagine rispetto al modello geometrico lineare



**distorsione
nulla
 $k = 0$**

**distorsione
a cuscinetto
"pincushion"
 $k < 0$**

**distorsione
a barilotto
"barrel"
 $k > 0$**

→ È necessario inserirla nel modello geometrico della camera



Modello geometrico con distorsione radiale

- ❖ la distorsione è **radiale**:
→ varia la **lunghezza del raggio** dal centro ottico al punto immagine

Dati:

$\mathbf{p}_{IM} | \mathbf{p}_U = (x_U, y_U)$: **posizione ideale**
(senza distorsione)

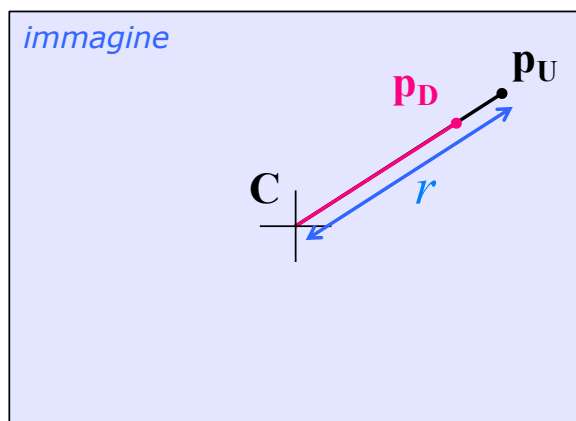
$\mathbf{p}_D = (x_D, y_D)$: **posizione reale, distorta**

$$r^2 = |\mathbf{p}_U|^2 = x_U^2 + y_U^2$$

$$\mathbf{p}_D = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = \mathbf{p}_U (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) = \begin{bmatrix} x_U (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \\ y_U (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \end{bmatrix}$$

- ❖ Ottenuto \mathbf{p}_U con il modello lineare, si calcola la posizione reale \mathbf{p}_D .

La distorsione radiale introduce una **non-linearità** nel modello di camera!





Modello geometrico completo

❖ Rototraslazione:

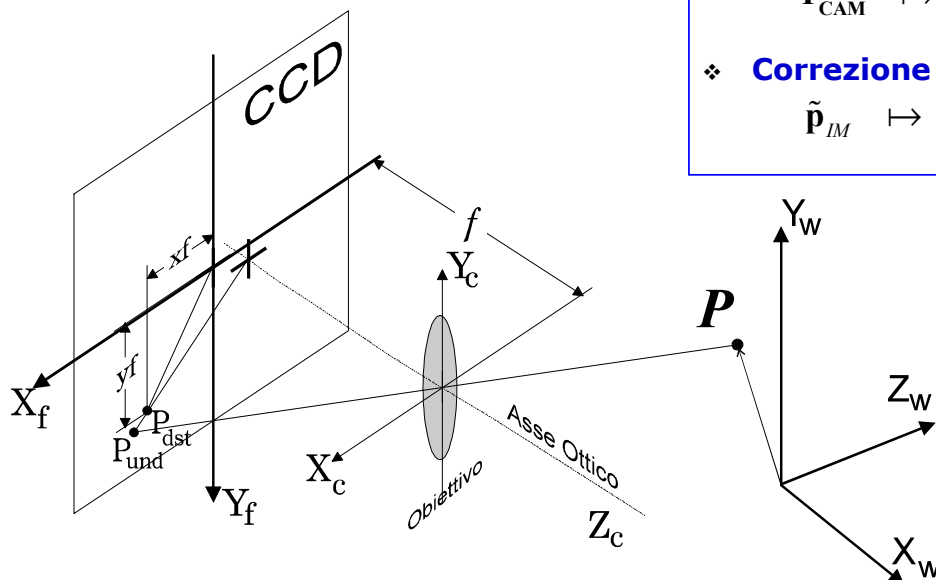
$$\tilde{\mathbf{P}}_W \mapsto \tilde{\mathbf{P}}_{CAM} = \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_W$$

❖ Proiezione prospettica:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{CAM} \mapsto \tilde{\mathbf{p}}_{IM} = \mathbf{K}_I \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{CAM}$$

❖ Correzione distorsione radiale:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{IM} \mapsto \mathbf{p}_D = \mathbf{p}_U \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots \right)$$



1. Generazione di un'immagine (Image Formation)

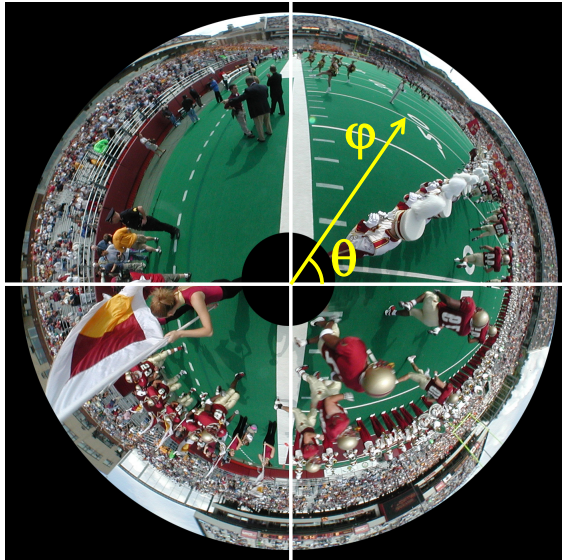
Modelli speciali di camera

- camere omnidirezionali
- camere per fotofinish

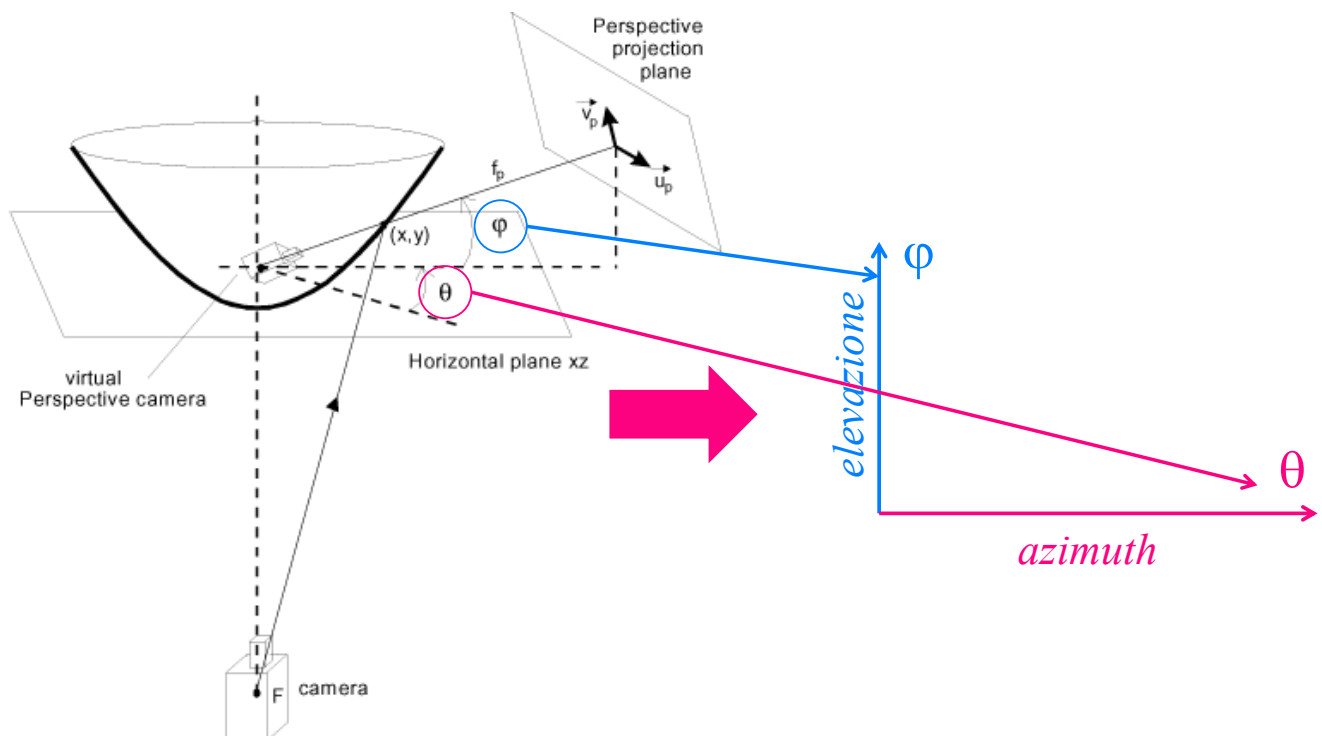


Camera omnidirezionale (360° camera)

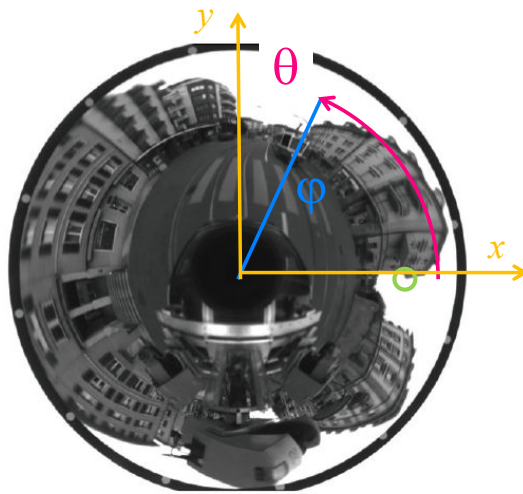
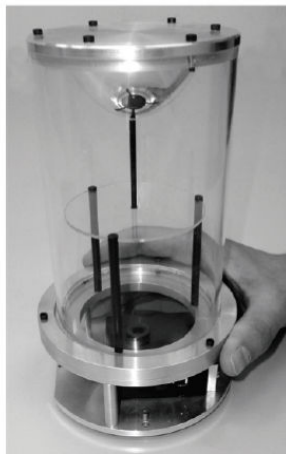
- ❖ Camera prospettica, ma puntata su uno specchio a forma di paraboloide
- ❖ Campo visivo di 360° attorno all'asse ottico
- ❖ Coordinate immagine **polari**: (*azimuth* θ , *elevazione* φ)



Modello di camera puntata su uno specchio a paraboloide



Esempio: camera puntata su uno specchio a paraboloido



Rettifica immagine:
 mapping coordinate polari (θ, ϕ) su un dominio rettangolare

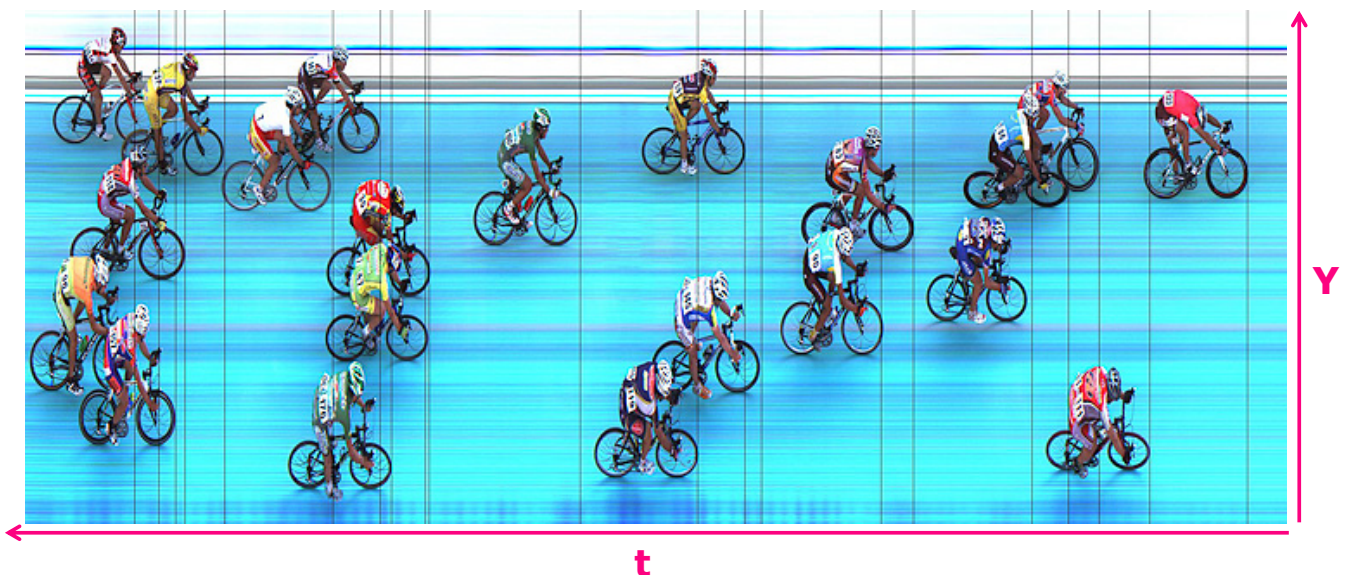
$$\theta = \text{atan2}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\phi = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Fotofinish camera

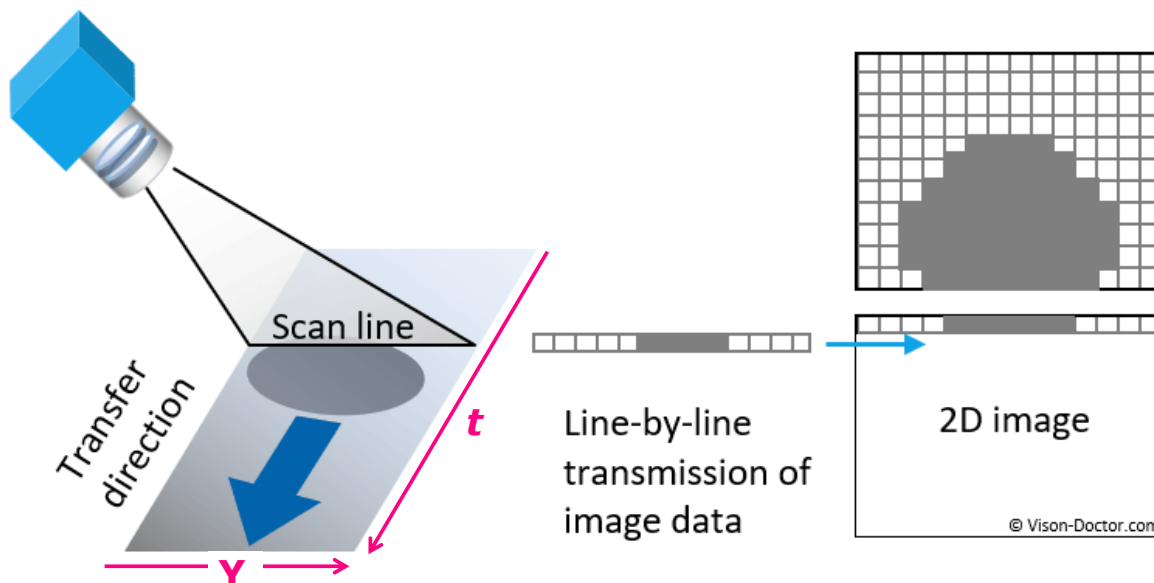
- ❖ Hardware: camera **lineare**, ad alta velocità
- ❖ Immagine: proiezione **prospettica** lungo **Y**, **ortogonale** lungo **t**
 - **Assenza di errori di prospettiva lungo la coordinata orizzontale**
 ➔ **asse orizzontale = istante temporale del passaggio (t)**





Fotofinish camera model

- ❖ Immagine: proiezione ortogonale, ascissa temporale: (t, Y)
 - **Coordinata orizzontale = istante temporale del passaggio**



Fotofinish camera model

- ❖ Camera lineare: proiezione **prospettica** lungo la scan-line
- ❖ Tra scan-line differenti: **traslazione** → proiezione **ortogonale**

