

Un prototipo di unità didattica ed un esempio di lezione

Sergio Casiraghi

6 agosto 2010

Si riporta a titolo di esempio come potrebbe essere strutturata formalmente un'unità didattica e formativa dedicata alla modellizzazione matematica dei problemi decisionali.

Nella sezione 2 si riporta un esercizio di programmazione lineare commentato passo passo e risolto, per fornire una guida dettagliata all'insegnante che volesse realizzare una lezione, eventualmente accompagnata da una sessione di laboratorio. L'esercizio è stato tradotto e liberamente adattato da K.R. Chelst, T.G. Edwards, "Does this line ever move?", Key Curriculum Press, Emeryville 2005.

1 Unità didattica e formativa (capitalizzabile): Modellizzazione matematica

Competenze traguardo (Obiettivi cognitivi e operativi)

- E' consapevole delle potenzialità e dei limiti della programmazione matematica e dei suoi metodi.
- Usa in modo rigoroso la notazione matematica adatta alla formulazione dei problemi decisionali.
- Sa riconoscere il carattere lineare/non-lineare nella formulazione dell'obiettivo e dei vincoli di un problema decisionale.
- Sa riconoscere il carattere continuo/discreto del dominio delle variabili decisionali di un problema.
- Sa risolvere problemi di programmazione matematica usando solutori software.
- Sa interpretare i risultati dell'elaborazione.

Specifiche della competenza

- Sa percepire l'esistenza di un problema, sa identificarne i dati, le variabili, i vincoli e gli obiettivi.
- Sa formulare il problema nei termini caratteristici della programmazione matematica.
- Sa formulare ipotesi per la sua risoluzione e sa come verificarla in relazione ai vincoli.
- Sa rappresentare il problema in un foglio elettronico.
- Sa usare un solutore automatico per trovare la soluzione ottima.

Contenuti teorici e pratici

- Richiami di Algebra Lineare (prerequisiti).
- Studio di case studies: identificazione e formalizzazione del problema decisionale.
- Formalizzazione del modello.
- Inserimento dei dati, delle variabili, dei vincoli e dell'obiettivo in un foglio elettronico.
- Attività di verifica e valutazione critica delle soluzioni trovate.

Attività degli allievi (fasi e tempi)

- Comprendere i problemi descritti (aula).
- Identificare dati, variabili, vincoli ed obiettivi (aula).
- Descrivere su carta i modelli dei problemi decisionali presentati (aula).
- Trasferire i modelli in un foglio elettronico (laboratorio).
- Sperimentare ipotesi per orientare la risoluzione dei problemi (laboratorio).
- Usare un solutore (es. il Solver di Excel) (laboratorio).
- Valutare criticamente la soluzione ottenuta (aula/laboratorio).

Metodologie attivate. Le metodologie applicate si fondano principalmente sull'apprendimento esperienziale, basato su problemi-stimolo e dunque sull'utilizzo di tecniche attive che coinvolgono direttamente i partecipanti. Verranno adottate modalità differenti in relazione allo stile di apprendimento del gruppo ed ai contenuti specifici del modulo formativo.

Durata

- Presentazione della Ricerca Operativa (lezione frontale): 1 ora.
- Descrizione problemi (lezione frontale): 1 ora per ogni problema.
- Modellizzazione matematica (lezione frontale o lavoro di gruppo): 2-4 ore per ogni problema.
- Uso di Excel e trasferimento del modello in Excel (laboratorio): 2 ore per ogni problema.
- Uso del Solver di Excel (laboratorio): 1 ora.

Strumenti e mezzi utilizzati. Schede informative, schede di programmazione, schede proposte di lavoro, scheda biblio-sitografica, software applicativo e programmi specifici.

Prerequisiti richiesti

- Nozioni di algebra lineare, notazione matematica, concetti di equazione e disequazione.
- Geometria del piano, retta nel piano.
- Concetti di linearità e di convessità.
- Concetto di variabile e funzione, di minimo e massimo di una funzione.

Modalità di valutazione Formulazione di problemi decisionali e loro risoluzione al calcolatore.

2 Una lezione guidata

In questa appendice si riporta a titolo di esempio come potrebbe essere svolta passo dopo passo una lezione/esercitazione dedicata alla modellizzazione matematica di un problema decisionale.

3 Scarpetta s.r.l.

La Scarpetta s.r.l. è un'impresa che opera nel distretto industriale di Asolo/Montebelluna tra le province di Vicenza e Treviso (dove si trova anche il museo dello scarpone), specializzata nella fabbricazione di calzature. L'azienda opera in prevalenza attraverso rapporti di sub-fornitura con le aziende di maggiori dimensioni del distretto, in particolare realizzando lavorazioni su commessa per prodotti di fascia alta e di serie limitata. Accanto a questa attività di lavorazione per conto terzi, l'azienda ha sviluppato negli anni una propria linea di prodotti articolata su due linee principali indirizzate a particolari segmenti di nicchia: i pattini a rotelle tipo RollerBlade e gli Scarponi da sci-alpinismo. I prodotti di entrambe le linee sono immessi sul mercato in quantità limitata, per un'utenza tecnicamente esigente. La produzione viene realizzata attingendo parzialmente alle risorse impegnate nelle attività in conto terzi. Uno studio dettagliato in programmazione lineare volto a definire il piano di produzione ottimale è stato sviluppato a Enrico Zaninetto del gruppo R.O.C.K. (Research on Organizations, Coordination & Knowledge) [?].

La Scarpetta s.r.l. desidera aumentare i suoi profitti. L'azienda produce due tipi particolari di scarpe: pattini a rotelle RollerBlade e Scarponi da sci-alpinismo. L'azienda ha 10 Euro di profitto su ogni paia di RollerBlade e 8.50 Euro di profitto su ogni paia di Scarponi. Le fasi di produzione delle scarpe comprendono il taglio dei materiali su una macchina e l'assemblaggio, fatto dagli operai, delle parti montate in paia di scarpe. Il numero di macchine, gli operai e le ore di funzionamento della fabbrica limitano il numero di paia di scarpe che l'azienda può fare in un dato periodo di tempo. Questi limiti sono detti vincoli.

Le variabili decisionali. Le quantità che in un problema decisionale non sono date ma sono da decidere sono denominate variabili di decisione o variabili decisionali.

Domanda 1: Quali sono le variabili di decisione che i responsabili della società devono considerare?

Domanda 2: Quali sono le loro unità di misura?

Domanda 3: Qual è il loro dominio?

Risposta 1: Le variabili decisionali sono il numero di RollerBlade (R) e il numero di Scarponi (S) da produrre ogni settimana.

Risposta 2: L'unità di misura di queste grandezze è quindi [paia/settimana].

Risposta 3: Il numero di paia di calzature da produrre è ovviamente un numero intero, ma trattandosi di un piano di produzione *per periodo di tempo*, sono accettabili anche valori frazionari.

La funzione obiettivo. La funzione obiettivo in un problema decisionale è la grandezza che si vuole ottimizzare.

Domanda 4: Qual è l'obiettivo in questo problema?

Domanda 5: Come dipende l'obiettivo dalle variabili decisionali?

Risposta 4: L'obiettivo è quello di massimizzare il profitto.

Risposta 5: Usando le lettere R e S per rappresentare le variabili di decisione identificate in precedenza, il profitto P è dato da:

$$P = 10R + 8.5S.$$

I vincoli. La Scarpetta s.r.l. ha questi vincoli: ci sono 6 macchine che sono utilizzate per tagliare i materiali. Ogni paio di RollerBlade richiede 3 minuti di tempo di taglio, mentre un paio di Scarponi richiede 2 minuti. Ci sono 850 operai addetti all'assemblaggio. Occorrono, ad un singolo operaio, 7 ore per comporre un paio di RollerBlade ed 8 ore per una coppia di Scarponi. Il lavoro di assemblaggio complessivamente impegna 40 ore alla settimana, sui cinque giorni lavorativi. Inoltre, ogni macchina tagliatrice funziona solamente 50 minuti all'ora, per via della manutenzione di routine.

Domanda 6: Quanti minuti di lavoro possono fare 6 macchine nelle 40 ore settimanali di funzionamento?

Domanda 7: Quanto tempo di funzionamento viene richiesto alle macchine tagliatrici per produrre R paia di roller-blade e S paia di scarponi in una settimana?

Domanda 8: Usare le risposte alle due domande precedenti per scrivere una disuguaglianza che rappresenti il vincolo sul limite di tempo di funzionamento delle macchine tagliatrici, specificando l'unità di misura del vincolo.

Risposta 6: Si ha 6 macchine $\times$ 50 minuti/ora $\times$ 40 ore/settimana = 12000 minuti/settimana.

Risposta 7: Per produrre R paia di roller-blade sono richiesti 3 minuti/paio $\times R$ paia/settimana = $3R$ minuti/settimana di funzionamento. Analogamente per produrre S paia di scarponi sono richiesti 2 minuti/paio $\times S$ paia/settimana = $2S$ minuti/settimana di funzionamento.

Risposta 8: $3R + 2S \leq 12000$ minuti/settimana.

Domanda 9: Quante ore di lavoro possono fare in una settimana 850 operai addetti alla produzione?

Domanda 10: Quanta manodopera richiede l'assemblaggio di R paia di roller-blade e S paia di scarponi in una settimana?

Domanda 11: Usare le risposte alle due domande precedenti per scrivere una disuguaglianza che rappresenti il vincolo sul numero limitato di ore lavorative disponibili ogni settimana per l'assemblaggio. Specificare l'unità di misura del vincolo.

Risposta 9: Si ha: $850 \text{ operai} \times 8 \text{ ore/giorno} \times 5 \text{ giorni/settimana} = 34000$ oreuomo/settimana.

Risposta 10: Per assemblare R paia di roller-blade sono richieste 7 oreuomo/paio $\times R$ paia/settimana $= 7R$ oreuomo/settimana. Analogamente per assemblare S paia di scarponi sono richieste 8 oreuomo/paio $\times S$ paia/settimana $= 8S$ oreuomo/settimana.

Risposta 11: $7R + 8S \leq 34000$ oreuomo/settimana.

Domanda 12: Potrebbe il numero di paia di scarpe dei due tipi prodotti ogni settimana essere negativo? Potrebbe essere zero? Perché?

Domanda 13: Scrivere due vincoli conseguenti alla risposta alla domanda precedente.

Risposta 12: Potrebbe essere nullo ma non potrebbe essere negativo. Non è possibile produrre un numero negativo di paia di scarpe.

Risposta 13: $R \geq 0$ e $S \geq 0$.

Domanda 14: Scrivere il modello matematico completo del problema e classificarlo.

Risposta 14: In base alle risposte precedenti si ha il modello seguente:

$$\text{maximize } P = 10R + 8.5S \quad (1)$$

$$3R + 2S \leq 12000 \quad (2)$$

$$7R + 8S \leq 34000 \quad (3)$$

$$R \geq 0 \quad (4)$$

$$S \geq 0. \quad (5)$$

Sia la funzione obiettivo sia i vincoli sono polinomi di grado 1 nelle variabili (incognite) R e S , cioè sono *lineari*. Le variabili R ed S possono assumere valori continui non-negativi. Si tratta quindi di un problema di *programmazione lineare*.

Risoluzione per via geometrica. Ammissibilità.

Domanda 15: La *regione ammissibile* è l'insieme di tutte le soluzioni che rispettano i vincoli. Rappresentare graficamente in un piano cartesiano con assi R e S il sistema delle disuguaglianze (vincoli del problema), evidenziando la regione ammissibile.

Risposta 15: Vedi figura. La regione colorata del grafico rappresenta la

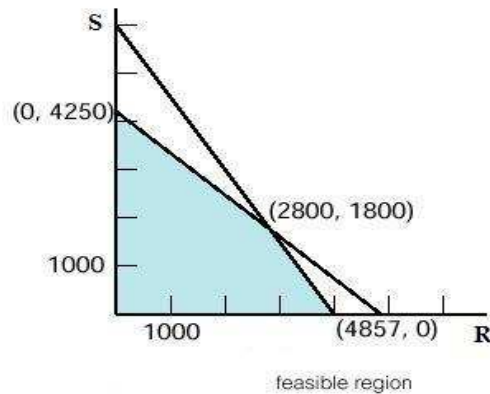


Figura 1: Rappresentazione grafica dei vincoli e della regione ammissibile

regione ammissibile, cioè l'insieme dei piani di produzione che rispettano i vincoli.

Ottimalità.

Di tutti i punti ammissibili bisogna cercare quello che dà il profitto massimo: tale punto è la *soluzione ottima*.

Domanda 16: Per determinare la soluzione ottima, potreste calcolare P per tutte le soluzioni ammissibili e poi scegliere la migliore?. Quante sono le soluzioni ammissibili?

Risposta 16: No, non sarebbe possibile, perché le soluzioni ammissibili sono tante quanti i punti della regione ammissibile nella figura, cioè infiniti!

Il Teorema fondamentale della programmazione lineare afferma che:

- se un problema di programmazione lineare ammette una soluzione ammissibile, allora ammette anche una soluzione ammissibile di base;
- se un problema di programmazione lineare ammette una soluzione ottima finita, allora ammette anche una soluzione ottima di base.

Questo teorema consente di restringere la ricerca alle sole soluzioni di base, che

sono in numero finito.

Soluzioni di base.

Domanda 17: Le linee rette corrispondenti ai quattro vincoli nel grafico s'intersecano in sei punti distinti. Identificare ogni punto di intersezione con le relative coordinate. Questi punti sono le *soluzioni di base*.

Domanda 18: Quali dei punti di intersezione soddisfano tutti i vincoli? Questi punti sono le *soluzioni di base ammissibili*.

Domanda 19: Valutare la funzione obiettivo in corrispondenza delle soluzioni di base ammissibili.

Domanda 20: Disegnare la retta dei punti di ugual valore P passante per ogni soluzione di base ammissibile. Che cosa notate riguardo a queste linee rette?

Domanda 21: Qual è la soluzione ottima e qual è il suo valore?

Risposta 17: Le soluzioni di base sono: $A = (0, 0)$, $B = (4000, 0)$, $C = (2800, 1800)$, $D = (0, 4250)$, $E = (0, 6000)$ e $F = (5000 - 1000/7, 0)$.

Risposta 18: Le soluzioni base ammissibili sono: $A = (0, 0)$, $B = (4000, 0)$, $C = (2800, 1800)$ e $D = (0, 4250)$.

Risposta 19: Si ha:

$$\begin{aligned}P(A) &= 10 \times 0 + 8.5 \times 0 = 0 \\P(B) &= 10 \times 4000 + 8.5 \times 0 = 40000 \\P(C) &= 10 \times 2800 + 8.5 \times 1800 = 43300 \\P(D) &= 10 \times 0 + 8.5 \times 4250 = 36125.\end{aligned}\tag{6}$$

Pertanto la miglior soluzione di base ammissibile è il punto C .

Risposta 20: Vedi figura 2. Le curve di livello formano un fascio di rette parallele. Il valore del profitto aumenta man mano che le rette si spostano in alto a destra. La retta corrispondente al miglior profitto è quella passante per il punto C .

Risposta 21: La *soluzione ottima* è quindi $C = (2800, 1800)$ ed il corrispondente *valore ottimo* è $P = 43300$ Euro/settimana.

Interpretazione della soluzione.

La produzione che massimizza i profitti della Scarpetta s.r.l. è quindi data da $R = 2800$ paia di roller-blade alla settimana e $S = 1800$ paia di scarponi alla settimana. A questo piano di produzione corrisponde un profitto di 43300 Euro la settimana.

Estensione del modello. La S.C.A.R.P.A. (<http://www.scarpa.net>), principale concorrente della Scarpetta s.r.l., ha recentemente avviato un'importante campagna pubblicitaria. La Scarpetta s.r.l. ha intrapreso per contro degli studi di mercato che indicano come, a causa dell'aumentata concorrenza, non si

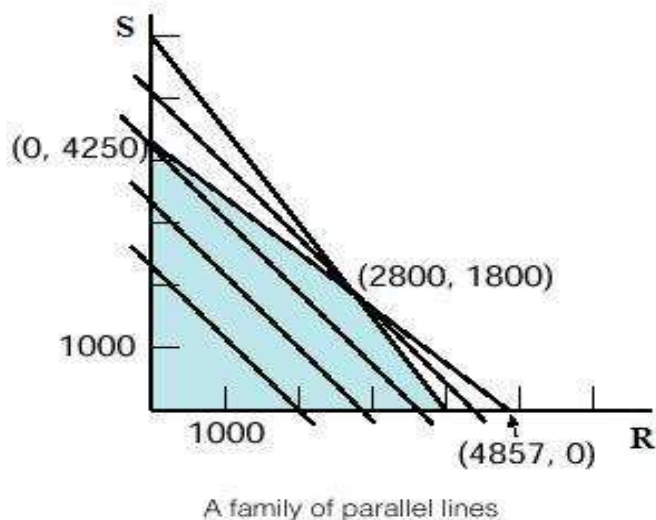


Figura 2: Rappresentazione grafica delle curve di livello della funzione obiettivo.

potrebbero vendere più di 2500 paia di RollerBlade o 3000 paia di Scarponi alla settimana.

Domanda 22: Aggiungere al modello i due nuovi vincoli sulle vendite.

Domanda 23: Rappresentare graficamente i due nuovi vincoli, insieme ai precedenti.

Risposta 22: I due nuovi vincoli sono:

$$R \leq 2500$$

$$S \leq 3000.$$

Risposta 23:

Domanda 24: Cosa accade della soluzione ottima precedente per questo nuovo problema? Spiegate il vostro ragionamento.

Domanda 25: Quali sono i vertici della nuova regione ammissibile?

Domanda 26: Trovare il profitto per ogni vertice e determinare la nuova soluzione ottima ed il suo valore.

Risposta 24: La soluzione C risulta ora inammissibile.

Risposta 25: La regione ammissibile ora ha cinque vertici: $A = (0, 0)$, $E = (0, 3000)$, $F = (1429, 3000)$, $G = (2500, 2062.5)$ e $H = (2500, 0)$.

Risposta 26: Il profitto corrispondente ad ogni vertice è il seguente:

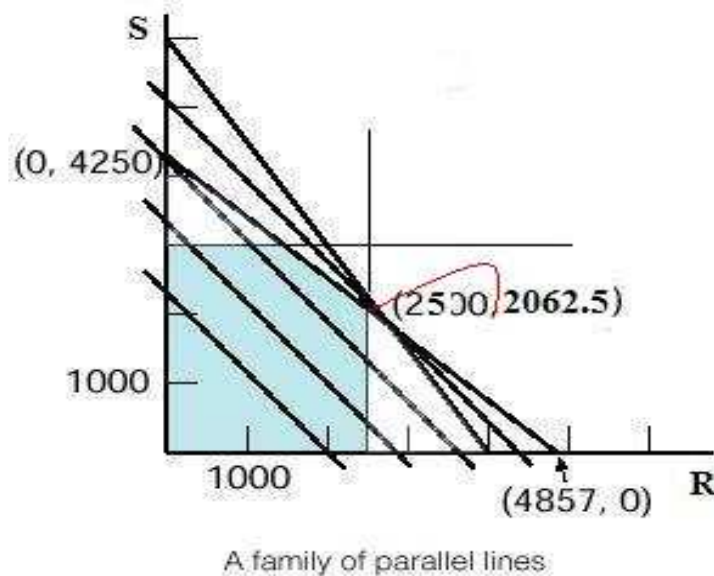


Figura 3: Rappresentazione grafica del problema esteso.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 10 \times 0 + 8.5 \times 0 = 0 \\
 P(E) &= 10 \times 0 + 8.5 \times 3000 = 25500 \\
 P(F) &= 10 \times 1429 + 8.5 \times 3000 = 39785.71 \\
 P(G) &= 10 \times 2500 + 8.5 \times 2062.5 = 42531.25 \\
 P(H) &= 10 \times 2500 + 8.5 \times 0 = 25000
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Pertanto la miglior soluzione di base ammissibile è il punto G ed il suo valore è 42531.25 Euro/settimana.

Un'altra estensione. Il Dott. Piero Scarpetta è responsabile dell'azienda di famiglia per la produzione. Sta provando a fare due cose: diminuire gli sprechi ed aumentare le vendite. In primo luogo il dott. Scarpetta desidera sapere se le risorse disponibili sono usate in modo efficiente. Egli desidera quindi sapere quante ore di taglio e quanto oreuomo per l'assemblaggio sono necessarie per produrre i RollerBlade e gli Scarponi che corrispondono alla strategia ottimale calcolata come sopra.

Domanda 27: Determinare quanto tempo di taglio è necessario per produrre il numero ottimale di ogni tipo di scarpa.

Domanda 28: Dal vincolo sul tempo di taglio ricavare se esiste un avanzo di

risorsa non utilizzata. Qual è la percentuale di utilizzo delle macchine tagliatrici?

Risposta 27: Il tempo di taglio necessario è pari a $3 \times 2500 + 2 \times 2062.5 = 11625$ minuti/settimana.

Risposta 28: Poiché la risorsa disponibile è pari a 12000 minuti/settimana, si ha un avanzo di 375 minuti/settimana non utilizzati. Le macchine tagliatrici sono utilizzate per un fattore pari a $11625/12000 = 0.96875$, cioè pari al 96.875%.

Domanda 29: Ripetere la stessa analisi per le ore-uomo necessarie all'assemblaggio.

Risposta 29: Il tempo necessario all'assemblaggio è pari a $7 \times 2500 + 8 \times 2062.5 = 34000$ ore-uomo/settimana. Poiché la risorsa disponibile è pari a 34000 ore-uomo/settimana, non c'è avanzo: la risorsa disponibile è usata completamente, cioè al 100%.