Prerequisiti matematici

Emilia Salucci

6 agosto 2010

Lo scopo di questa dispensa è di richiamare i concetti matematici di base la cui conoscenza è un prerequisito perché gli alunni possano lavorare con i *modelli matematici dei problemi decisionali.* I concetti possono essere facilmente presentati oltre che con le usuali definizioni teoriche, anche tramite il foglio elettronico. Si suggerisce di considerare questi due momenti come complementari e non alternativi: la definizione teorica dei concetti stimola la capacità di astrazione; la padronanza del foglio elettronico rende "visibili" e "operanti" i concetti matematici; inoltre mette gli alunni in grado di lavorare su esercizi che per dimensioni e complessità sarebbero ingestibili con carta e penna.

1 Concetti di base

1.1 Vettori, matrici e indici

Definiamo vettore un insieme ordinato di n elementi (componenti) a cui assegnamo un indice che assume valori da 1 a n. Perciò v_1 indica il primo elemento del vettore v, v_2 il secondo e così via.

Un modo molto naturale di vedere il vettore è di scrivere i valori delle sue componenti allineati su una stessa colonna (o riga) del foglio elettronico. Può essere utile anche riportare i corrispondenti valori degli indici nelle caselle della colonna (o riga) a fianco. Per esempio in Excel ($B5 : B14$) indica il vettore costituito da dieci componenti che occupano le celle $B5, B6, \ldots, B14$.

Una matrice è un vettore con più dimensioni. Per identificare una componente di un vettore con k dimensioni occorre usare k indici. In un foglio elettronico è possibile rappresentare matrici solo fino a due dimensioni, i cui elementi vengono identificati da un indice di riga (numero) e da un indice di colonna (lettera o gruppo di lettere). Ad esempio ($B5 : D14$) indica una matrice con dieci righe (con indici da 5 a 14) e tre colonne (con indici da B a D).

1.2 Sommatorie

Per indicare in modo sintetico la somma di molti addendi si può usare una notazione come questa:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i$$

che equivale a

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Una volta ordinati in un vettore c i valori da sommare (nel caso sopra, n valori) è infatti possibile riferirsi a ciascuno di essi tramite un indice i.

Con un foglio elettronico, come Excel, è possibile calcolare automaticamente la somma degli elementi di un vettore e scriverla in una cella. La funzione da usare è “SUM” (nella versione inglese) o “SOMMA” (nella versione italiana). Ad esempio la funzione “=SUM(B5:B14)” calcola la somma di tutti i numeri scritti nelle celle della colonna B, dalla riga 5 alla riga 14 comprese.

Come per l'estensione da vettore a matrice, così la sommatoria si può estendere a due o più indici. Ad esempio

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}$$

equivale alla somma

$$\begin{aligned} &c_{11} + c_{12} + \ldots + c_{1m} + \\ &+ c_{21} + c_{22} + \ldots + c_{2m} + \\ &+ \ldots + \\ &+ c_{n1} + c_{n2} + \ldots + c_{nm}. \end{aligned}$$

In Excel la funzione "=SUM(B5:D14)" calcola la somma di tutti i numeri scritti nelle celle delle colonne B, C e D dalla riga 5 alla riga 14.

Gli indici possono anche essere usati per definire somme su sottinsiemi di tutti i valori del vettore o della matrice c. Ad esempio:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}$$

indica la somma degli elementi della matrice quadrata c con n righe e n colonne, che si trovano al di sopra della diagonale principale, cioè nel triangolo in alto a destra: sono gli elementi della matrice che hanno un indice di riga (i) strettamente minore dell'indice di colonna (j).

1.3 Prodotto scalare

Un'operazione che capita spesso di dover fare è il prodotto elemento per elemento tra due vettori della stessa dimensione. Tale operazione si chiama *prodotto scalare*, poiché ha come risultato un numero scalare e non un vettore.

In generale il prodotto tra due vettori a e b di dimensione n è pari a

$$a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \ldots + a_n \times b_n$$

cioè

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Ad esempio il prodotto scalare tra il vettore $[4, 8, 10]$ ed il vettore $[-1, 5, 0.5]$ vale $4 \times -1 + 8 \times 5 + 10 \times 0.5 = -4 + 40 - 5 = 31$.

In Excel la funzione che realizza il prodotto scalare è "SUMPRODUCT" (nella versione inglese) o "MATR.SOMMA.PRODOTTO" (nella versione italiana). Ad esempio "=SUMPRODUCT(B5:B14;D5:D14)" scrive nella cellla prescelta il prodotto scalare del vettore nella colonna B (dalla riga 5 alla riga 14) con il vettore nella colonna D (dalla riga 5 alle riga 14). Il prodotto scalare si può eseguire componente per componente anche su vettori di più dimensioni: ad esempio di può moltiplicare scalarmente una matrice di n righe e m colonne per un'altra matrice di n righe e m colonne. Ad esempio: "=SUMPRODUCT(B5:D14;F1:H10)" moltiplica scalarmente tra loro due matrici di 10 righe e 3 colonne.

1.4 Funzioni e argomenti

. Quando il valore di una quantità y dipende dal valore di altre quantità, si dice che y *è funzione* di esse. Per questo in Excel si chiama *funzione* quella che calcola e scrive in una cella un valore che dipende a sua volta da altri valori che si trovano in altre celle. Il caso semplice della funzione "SUM" illustrata sopra assegna alla cella prescelta un valore che dipende dal valore presente nelle celle in cui sono scritti gli addendi. Al variare del valore degli addendi, *automaticamente il foglio elettronico ricalcola e aggiorna il valore della funzione.*

Si dice che le grandezze da cui la funzione dipende (ad esempio gli addendi della somma) sono le *variabili indipendenti*, mentre la grandezza calcolata (ad esempio la somma) è la *variabile dipendente.* Il suo valore infatti dipende dal valore delle variabili indipendenti. L'insieme delle variabili indipendenti si chiama anche *argomento* della funzione.

2 Esempio didattico

È ben noto e che *saper pensare in termini di relazioni e funzioni* è uno degli obiettivi fondamentali dell'apprendimento della matematica.

Le relazioni e le funzioni possono essere rappresentate in molti modi: tabelle, espressioni algebriche, grafici nel piano cartesiano e nello spazio. Rappresentazioni diverse hanno proprietà diverse e possono essere utili per scopi diversi; pertanto, per capire situazioni e risolvere problemi occorre conoscere *vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni* e saper passare opportunamente da una all'altra.

L'attività qui presentata è un esempio di come consolidare la *conoscenza intuitiva del concetto di funzione* e di come iniziare la sua formalizzazione, avendo cura di mantenere un forte controllo del significato dei simboli e delle rappresentazioni, in uno specifico contesto di tipo scientifico legato a temi della vita quotidiana. In particolare, vengono considerate funzioni definite su insiemi finiti e le loro rappresentazioni mediante tabelle e grafici a colonne e vengono esercitate le abilità di calcolo e di uso del foglio elettronico.

Le competenze indicate come obiettivi della Fase I descritta nel seguito si trovano negli OSA del terzo anno della scuola secondaria di primo grado e del primo biennio dei licei. Questo tipo di competenze si trova inoltre nel quadro di riferimento OCSE-PISA 2003, nei temi Cambiamento e relazioni e Quantità. L'attività è quindi adatta sia al terzo anno della scuola secondaria di primo grado, in collegamento con Scienze e Informatica, sia all'inizio del primo biennio dei licei, naturalmente a seconda delle situazioni delle classi e con opportuna scelta dei tempi. Uno sviluppo naturale ulteriore, nel primo biennio dei licei, può essere l'attività descritta nella Fase II, nella quale si utilizzano le funzioni polinomiali di primo grado e la loro rappresentazione nel piano cartesiano e nello spazio.

2.1 Fase I

L'insegnante distribuisce agli studenti delle tabelle con la consegna di osservarle con attenzione e successivamente provare a rispondere alle domande. Si può cogliere l'occasione per far notare alcune caratteristiche "quantitative" degli alimenti, come la presenza più o meno abbondante di sostanze nutritive, anche in relazione alla percentuale, elevata o meno, di acqua. Il docente pone, dunque, alcuni quesiti:

1. Quanti grammi di grassi, proteine e carboidrati ha mangiato Paolo nella giornata?
2. Qual è l'apporto energetico complessivo della dieta di Paolo?
3. Quali sono i cibi che hanno apportato la maggior quantità di energia?

4. Quali sono, a parità di peso, i cibi che forniscono più calorie e quelli che ne forniscono meno?

Per rispondere alle domande 3 e 4, puoi utilizzare un **foglio elettronico**.

Tabella 1
Composizione in termini di contenuto di grassi, proteine e carboidrati di alcuni fra i principali alimenti che fanno parte della dieta quotidiana. I dati sono riferiti a 100 g di alimento privato delle parti di scarto (bucce, ossa,...), tranne quello relativo all'uovo.

Alimenti	Proteine	Grassi	Carboidrati
1 Uovo (circa 50 g)	6	5	1
Arance	2	1	7
Biscotti secchi	6	8	85
Burro	1	83	2
Cioccolato	7	35	55
Latte	4	2	4
Lattuga	2	1	3
Mele	0	0	11
Merendine	7	17	63
Olio	0	99	0
Pane	8	1	65
Pasta (secca)	11	1	83
Patate fritte	4	7	30
Pollo (petto)	23	1	0
Pomodori	1	0	3
Prosciutto cotto	20	15	1
Riso	7	1	87
Tonno sott'olio	25	10	0
Zucchero	0	0	100

2.2 Fase II

Nell'affrontare le domande 3 e 4 è opportuno introdurre il *foglio elettronico* ed è quindi necessario disporre almeno di un calcolatore ogni due o tre studenti. Inoltre è utile che gli studenti abbiano la possibilità di utilizzare autonomamente il calcolatore per alcune ore nel corso dell'attività sia a casa che a scuola.

Grazie al foglio elettronico è possibile eseguire immediatamente i calcoli relativi agli apporti complessivi di proteine, grassi, carboidrati e calorie di una dieta qualsiasi, semplicemente inserendo nelle apposite celle i dati specifici delle quantità di alimenti. Quindi si possono facilmente confrontare tra loro diverse diete, eventualmente quelle di ciascuno studente (vedi i suggerimenti per gli elementi di verifica).

L'insegnante e gli studenti possono naturalmente trovare i costituenti di altri alimenti, se occorre, ad esempio sul sito dell'Istituto Nazionale di Ricerca per gli Alimenti e la Nutrizione (www.inran.it).

Tabella 2.
Cosa ha mangiato Paolo in un giorno

	alimento	peso in grammi
colazione	**latte**	**200**
	pane	**80**
	biscotti secchi	**30**
	zucchero	**15**
spuntino del mattino	**pane**	**100**
	prosciutto cotto	**30**
	riso	**80**
pranzo	**burro**	**10**
	pollo	**120**
	patate fritte	**100**
	arance	**200**
	merendine	**40**
merenda	**cioccolato**	**40**
	pasta (secca)	**100**
cena	**tonno sott'olio**	**50**
	olio	**10**
	pomodori	**200**
	pane	**50**
	mele	**200**

Tabella 3
Apporto energetico, espresso in calorie, di un grammo di proteine, grassi e carboidrati

	proteine	grassi	carboidrati
calorie per 1 grammo	**4**	**9**	**4**

2.3 Indicazioni metodologiche

Lavorare in gruppo, pianificare il lavoro, discutere. I ragazzi vengono suddivisi in gruppi di due o tre e, prima di cominciare ad eseguire le operazioni, sono sollecitati, a fare una *stima anticipata delle risposte*, a pianificare una strategia per l'esecuzione e la registrazione dei calcoli, a prevedere qualche modalità per la rappresentazione dei risultati e a tenere nota del tempo impiegato per svolgere diversi segmenti del lavoro. I gruppi sono poi invitati a confrontare le strategie utilizzate e i risultati ottenuti.

Abilità: usare tabelle e calcolare con sicurezza; consapevolezza delle cifre significative e arrotondamento. La prima fase dell'attività richiede *abilità elementari* relative alla lettura e all'interpretazione delle tabelle e conduce ad una familiarizzazione con programmi gestionali per l'elaborazione dei dati.

Nel caso in cui l'attività sia rivolta a studenti del secondo ciclo allora tali abilità dovrebbero essere già possedute (almeno in parte) dalla scuola secondaria di primo grado e dunque l'obiettivo diviene il loro consolidamento. Occorre anche eseguire ripetutamente *calcoli semplici*.

Per i calcoli si incoraggino gli studenti a usare *calcolatrici tascabili*, cercando però di eseguire il calcolo *a mente* quando questo è possibile (ogni occasione dovrebbe sempre essere colta per sviluppare la capacità di fare semplici calcoli mentali, poiché in questo modo si sviluppa la memoria a breve termine e si pongono le basi per la costruzione di abilità più complesse di "manipolazione" mentale di simboli e concetti). La capacità di calcolare rapidamente, con attenzione e con sicurezza, con la calcolatrice o a mente, adottando opportune strategie di esecuzione e registrazione parziale, è un obiettivo importante da perseguire e verificare.

I dati della composizione degli alimenti sono *valori medi* che possono differire da quelli di uno specifico cibo anche per una percentuale elevata (in qualche caso persino maggiore del 10Anche senza entrare in una discussione precisa è comunque opportuno far osservare che le cifre delle unità e anche delle decine sono per alcuni alimenti *non significative*. Pertanto, i numeri ottenuti come apporti complessivi giornalieri, che nelle tabelle 4 e 5 qui incluse sono scritte con tutte le cifre decimali, potrebbero essere arrotondati senz'altro all'unità o alla decina.

Pensare in termini di funzioni. Un possibile modo per rispondere alle domande 1 e 2, e anche per rappresentare i calcoli parziali così da poter controllare il lavoro in corso, è la costruzione di un tabulato come la tabella 4.

Ciascuna delle quattro colonne numeriche di questa tabella deve essere pensata come una *rappresentazione tabulare* di una funzione definita sull'insieme degli alimenti. In alto sopra ciascuna colonna è riportata una *descrizione verbale* della funzione e, subito sotto, una *rappresentazione algebrica* della stessa.

Non è necessario *definire* cosa sia una funzione (v. la sezione "Approfondimento Disciplinare"), basta utilizzare il termine in modo appropriato. A questo stadio si potrebbe parlare di funzione come meccanismo che associa al nome di un alimento il contenuto in grammi.

Esempio. Se denotiamo con A l'insieme degli alimenti, la seconda colonna della tabella 4 è una descrizione della funzione

$$q : A \mapsto \Re$$

che a ciascun alimento $a \in A$ fa corrispondere la quantità $q(a)$ di quell'alimento che Paolo ha mangiato, misurata in etti. Nella terza colonna troviamo invece rappresentata la funzione

$$gr : A \mapsto \Re$$

Tabella 4. Analisi della dieta di Paolo

Alimenti	quantità di alimento a mangiata da Paolo, in etti	grammi di proteine introdotti da Paolo con l'alimento a	grammi di grassi introdotti da Paolo con l'alimento a	grammi di carboidrati introdotti da Paolo con l'alimento a
a	q(a)	pr(a) = P(a)*q(a)	gr(a) = G(a)*q(a)	ca(a) = C(a)*q(a)
1 Uovo (circa 50 g)	0	0	0	0
Arance	2	4	2	14
Biscotti secchi	0,3	1,8	2,4	25,5
Burro	0,1	0,1	8,3	0,2
Cioccolato	0,4	2,8	14	22
Latte	2	8	4	8
Lattuga	0	0	0	0
Mele	2	0	0	22
Merendine	0,4	2,8	6,8	25,2
Olio	0,1	0	9,9	0
Pane	2,3	18,4	2,3	149,5
Pasta (secca)	1	11	1	83
Patate fritte	1	4	7	30
Pollo (petto)	1,2	27,6	1,2	0
Pomodori	2	2	0	6
Prosciutto cotto	0,3	6	4,5	0,3
Riso	0,8	5,6	0,8	69,6
Tonno sott'olio	0,5	12,5	5	0
Zucchero	0,15	0	0	15
TOTALI		**106.6**	**69.2**	**470.3**
CALORIE per tipo di nutriente		**426,4**	**622,8**	**1881,2**
apporto energetico complessivo	**2930,4**			

che a ciascun alimento $a \in A$ fa corrispondere i grammi di proteine $gr(a)$ contenuti in quell'alimento, nella dose consumata da Paolo. Per ogni $a \in A$ si ha:

$$gr(a) = q(a)P(a)$$

dove P è la funzione che si trova rappresentata nella seconda colonna della tabella 1, e si dice quindi che la funzione gr è il prodotto delle due funzioni P e q.

2.4 Il foglio elettronico

Naturalmente è possibile affrontare anche le domande 3 e 4 con carta, penna e calcolatrice; tuttavia a questo punto si sollecitano gli studenti a ricorrere a strumenti di calcolo più sofisticati e se non scaturisce una proposta spontanea si suggerisce loro di utilizzare un foglio elettronico. Se alcuni studenti non hanno mai usato questo strumento l'attività può essere utilizzata come una prima introduzione all'uso del foglio elettronico. Si forniscono le tabelle 1 e 2 precedenti su supporto elettronico Esempio_rel_funz e i ragazzi in un primo momento ripetono la realizzazione della tabella 4, che avevano già prodotto manualmente, unificando le tabelle 1 e 4, inserendo in una cella la formula di calcolo necessaria (nell'esempio: la cella F5=B5+E5) e trascinando poi la formula lungo la colonna. Per trascinare lungo le righe occorre invece avere l'avvertenza di fissare l'indice di riga con un carattere "$" come nell'esempio F5=B5+$E5. Gli studenti dovrebbero cominciare a percepire la potenza e la comodità dello strumento informatico.

Successivamente i ragazzi realizzano le tabelle delle calorie per i differenti alimenti presi in esame: una tabella relativa alla quantità assunta in una giornata da Paolo (tabella 5), e una tabella con il calcolo delle calorie per 100 g di alimento considerato (tabella 6).

Tabella 5. Apporto energetico della dieta di Paolo

	Alimenti	calorie da proteine	calorie da grassi	calorie da carboidrati	calorie totali
		Kp(a) = 4*pr(a)	Kg(a) = 9*gr(a)	Kc(a) = 4*ca(a)	K(a) = Kp(a) + Kg(a) + Kc(a)
1	1 Uovo (circa 50 g)	0	0	0	0
2	Arance	16	18	56	90
3	Biscotti secchi	7,2	21,6	102	130,8
4	Burro	0,4	74,7	0,8	75,9
5	Cioccolato	11,2	126	88	225,2
6	Latte	32	36	32	100
7	Lattuga	0	0	0	0
8	Mele	0	0	88	88
9	Merendine	11,2	61,2	100,8	173,2
10	Olio	0	89,1	0	89,1
11	Pane	73,6	20,7	598	692,3
12	Pasta (secca)	44	9	332	385
13	Patate fritte	16	63	120	199
14	Pollo (petto)	110,4	10,8	0	121,2
15	Pomodori	8	0	24	32
16	Prosciutto cotto	24	40,5	1,2	65,7
17	Riso	22,4	7,2	278,4	308
18	Tonno sott'olio	50	45	0	95
19	Zucchero	0	0	60	60
		426,4	622,8	1881,2	2930,4

Con il foglio elettronico si realizzano con facilità anche i grafici a colonne di queste ultime tabelle (tabelle 7 e 8) e si possono riordinare gli alimenti in modo che le calorie nelle tabelle 5 e 6 siano in ordine crescente. Si possono anche realizzare grafici analoghi per le funzioni riordinate. In questo modo si è risposto completamente alle domande iniziali.

L'uso del foglio elettronico dovrebbe aiutare a "vedere" ciascuna delle colonne 3, 4, 5, 6 della tabella 5 (F, G, H, I nell'esempio del foglio 3 del file Excel) come una funzione definita sull'insieme degli alimenti e ottenuta con combinazioni elementari delle funzioni che si trovano nella tabella 4. Occorre che gli allievi capiscano bene l'uso di una notazione del tipo $= B5 * \$E5$, come quella che si trova nella celle F5 del foglio 2 e nelle celle successive nella stessa colonna, comparato all'uso della notazione $pr(a) = P(a) * q(a)$, che si trova nell'intestazione della colonna.

Tabella 6. Calorie per 100 grammi

	alimento	Calorie per 100grammi
1	1 Uovo (circa 50 g)	73
2	Arance	45
3	Biscotti secchi	436
4	Burro	759
5	Cioccolato	563
6	Latte	50
7	Lattuga	29
8	Mele	44
9	Merendine	433
10	Olio	891
11	Pane	301
12	Pasta (secca)	385
13	Patate fritte	199
14	Pollo (petto)	101
15	Pomodori	16
16	Prosciutto cotto	219
17	Riso	385
18	Tonno sott'olio	190
19	Zucchero	400

2.5 Spunti per un approfondimento disciplinare

L'obiettivo principale di questa sezione è quello di precisare il significato e l'uso di alcuni termini.

Per introdurre il concetto di funzione. Se vogliamo introdurre gli studenti al concetto di *funzione*, la cosa migliore è usare il termine in modo appropriato per parlare delle *operazioni concettuali* che stiamo eseguendo e che ci interessano, ad esempio quelle che sono proposte nell'esempio sopra descritto, senza preoccuparci di definirlo formalmente. Dopo avere considerato un certo numero di esempi, si possono anche dire frasi del tipo: "una funzione f da un insieme A a un insieme B è una legge (oppure una corrispondenza) che ad ogni elemento di A associa un elemento di B" (si intende che l'elemento di B è unico), ma l'insegnante eviterà di dire che questa frase è una *definizione*, poiché essa rimanda il significato del termine *funzione* al significato del termine *legge* o *corrispondenza* e un tale rimando non ha fine.

Se vogliamo definire il concetto di funzione. È possibile definire il termine *funzione* a partire dai soli termini primitivi di *elemento*, *insieme* e *appartiene*:

Definizione. Una funzione g da un insieme A ad un insieme B è un sottoinsieme E del prodotto cartesiano $A \times B$, tale che per ogni $x \in A$ esiste, ed è

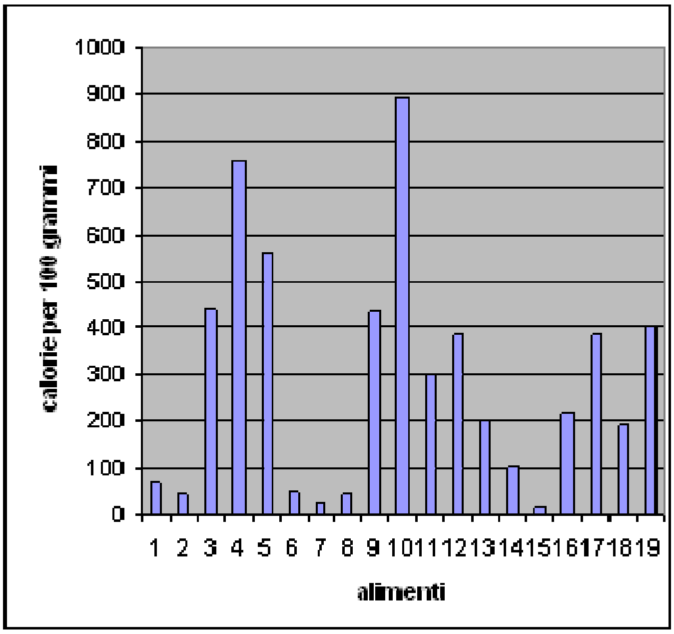

Figura 1: Tabella 7: Contenuto calorico di ogni alimento

unico, un $y \in B$ per cui $(x, y) \in E$.

L'insieme A viene detto *dominio della funzione* e l'insieme E si dice *grafico della funzione*. Inoltre, per ogni elemento x del dominio A, quell'elemento y di B tale che $(x, y) \in E$ si denota $g(x)$ e si chiama "immagine di x attraverso la funzione g". Se B è un insieme di numeri, il numero $g(x)$ si dice comunemente "valore della funzione g in corrispondenza ad x".

Relazioni e funzioni. **Definizione.** Si dice relazione nella coppia di insiemi (A, B) qualsiasi sottoinsieme E del prodotto cartesiano $A \times B$.

Quindi le funzioni sono particolari tipi di relazioni, ma ci sono relazioni che non sono funzioni. Ad esempio, se $A = B = \Re$, dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali, allora l'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ è una relazione, ma non è una funzione (né da A a B, né da B ad A). Le *relazioni d'ordine* e le *relazioni di equivalenza* sono altri esempi di relazioni che non sono funzioni.

Il concetto di funzione nella scuola. Ogni docente della scuola secondaria dovrebbe conoscere i concetti di relazione e funzione; inoltre dovrebbe aver riflettuto sulle definizioni date sopra e dovrebbe comprendere la loro utilità per chiarificare il discorso matematico. Tuttavia, come si è detto all'inizio, nella scuola non è necessario, né in generale opportuno, dare tali definizioni, almeno

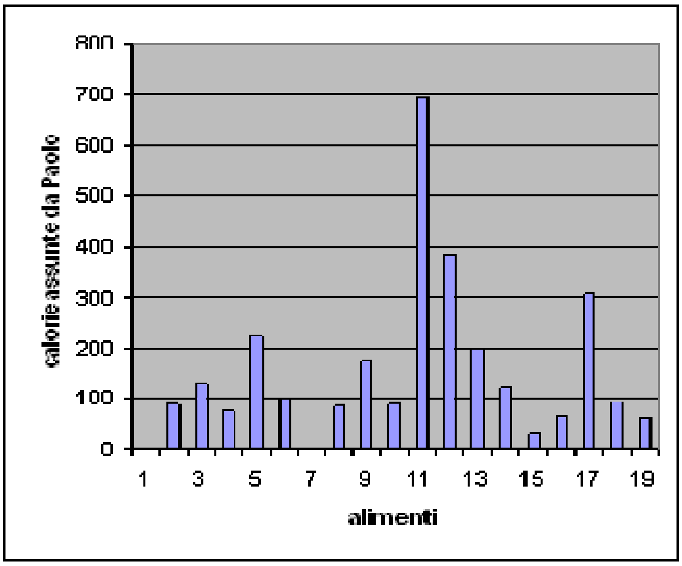

Figura 2: Tabella 8: Contenuto calorico della dieta di Paolo

in una fase iniziale. E' invece preferibile che gli allievi costruiscano rappresentazioni e prototipi del concetto a partire da esempi e dall'uso del termine "funzione" in diverse frasi e in diversi contesti. Anche in assenza di una definizione formale del concetto, si può utilizzare la notazione:

$$f : A\square B$$

per dire che abbiamo una funzione f da un insieme A ad un insieme B. È anche opportuno usare la notazione $f(a)$ per indicare l'elemento di B che viene associato dalla funzione f all'elemento a.

Il grafico. Il grafico di una funzione f è "l'insieme di tutte le coppie $(a, f(a))$, dove a sta nell'insieme A". Questo insieme può essere *rappresentato* come un insieme di punti nel piano, che spesso assume le caratteristiche di un disegno o di una curva ricca di significato, dal quale si ricavano immediatamente utili informazioni qualitative e quantitative sulla funzione. Dunque il disegno che chiamiamo comunemente "grafico" è più propriamente una rappresentazione dell'insieme "grafico di f".

Mentre si ritiene che una tale distinzione debba essere chiara nella mente del docente, non è opportuno insistere su di essa, in generale, con gli studenti.

Il concetto di funzione si utilizza spesso per descrivere situazioni reali in cui una certa grandezza y varia in relazione ad un'altra grandezza x, che varia a sua volta. Le lettere x e y vengono chiamate "variabili" e, poiché talvolta si considerano relazioni di causa ed effetto, per indicare rispettivamente la x e la y si trovano usati i nomi variabile indipendente e variabile dipendente. L'uso indiscriminato di questa terminologia può però risultare fuorviante.

2.6 Elementi per prove di verifica

Si propone agli studenti di scrivere la loro dieta di un giorno e di rispondere alle medesime questioni poste sulla dieta di Paolo (domande 1 e 2).

Si può anche chiedere agli alunni di compilare una dieta che ritengono ottimale per loro stessi per poi far costruire loro le relative tabelle e grafici e fare infine una comparazione per osservare analogie e differenze tra un'alimentazione che ritengono bilanciata e quella da loro effettivamente seguita.

2.7 Spunti per altre attività con gli studenti

Si riportano qui di seguito alcuni suggerimenti per attività individuali degli studenti, a casa o a scuola.

Pizza Quattro Stagioni. La ricetta di una pizza Quattro Stagioni per 4 persone prevede gli ingredienti specificati in tabella (che deve essere allegata all'esercizio). La pizza viene mangiata completamente da 3 ragazze. La prima ne mangia 1/4, la seconda ne mangia una volta e mezzo la quantità della prima e la terza termina la pizza. Dire qual è l'apporto di grassi, proteine, carboidrati e calorie assunto da ciascuna delle tre ragazze.

Si possono dare due o tre esercizi di questo tipo, in momenti successivi.

Per il primo esercizio può essere opportuno dare agli studenti un riferimento comodo e veloce (una tabella) per trovare la composizione degli alimenti che compaiono fra gli ingredienti. Nel primo esercizio si può chiedere agli studenti di rispondere disegnando una tabella su un foglio di carta e facendo i calcoli a mente e con la calcolatrice. Accertato che questa competenza è posseduta, negli esercizi successivi si dovrebbe chiedere di rispondere utilizzando un foglio elettronico.

Smontiamo una funzione. Secondo una tariffa offerta da una compagnia telefonica, il costo di una telefonata di s secondi è una funzione di s, data dalla seguente formula

$$f(s) = (TRONCA(s/25) + 1) * 0.12 + 0.16,$$

dove la funzione "TRONCA" va dall'insieme dei numeri decimali all'insieme dei numeri interi. Non sappiamo come è definita in generale la funzione TRONCA, ma sappiamo che:

$$TRONCA(3.26) = 3$$

$$TRONCA(0.6) = 0$$

$$TRONCA(6.04) = 6$$

a) Riesci a immaginare quale sia una ragionevole definizione generale della funzione “TRONCA”?
b) Cerca di dire a parole cosa fa la funzione f.
c) Realizza una tabella dei valori $f(s)$, per s che varia nell'insieme $\{5, 10, 15, \ldots, 60\}$ e disegna un grafico di f per questi valori.
d) Con un foglio elettronico, realizza la tabella e il grafico per tutti i valori interi di s compresi fra 1 e 1000.

La funzione “TRONCA” si trova in effetti su alcuni fogli elettronici di uso comune e ad un numero decimale positivo z associa il più grande intero minore o uguale a z. La funzione f dice che il costo di una telefonata è di 12 centesimi per ogni scatto più 16 centesimi alla risposta e che gli scatti sono anticipati ogni 25 secondi. Sul foglio elettronico si può realizzare una tabella con una prima colonna in cui compare il numero di secondi, che varia con il passo che si vuole, una seconda colonna con il numero $s/25$, una terza colonna con la funzione $(TRONCA(s/25) + 1)$, e infine una quarta colonna con il costo. Se si divide il tempo negli intervalli $[0, 25), [25, 50), [50, 75), \ldots$, la funzione $(TRONCA(s/25) + 1)$ si può interpretare come “il numero d'ordine dell'intervallo in cui si trova il numero s”.

Questa seconda attività è stata volutamente scelta in un contesto diverso dalle diete per favorire i processi di decontestualizzazione e ricontestualizzazione dei concetti matematici introdotti.