Programmazione lineare
Introduzione

Giovanni Righini

6 agosto 2010

1 Introduzione

La Programmazione Lineare (PL) costituisce spesso il primo ed unico argomento di Ricerca Operativa che viene insegnato nei programmi scolastici. In effetti la PL ha un'importanza rilevantissima, poiché su di essa si basano anche le principali tecniche risolutive dei problemi nel discreto. Inoltre tutti i problemi di programmazione lineare possono essere risolti con un solo algoritmo: l'algoritmo del simplesso (Dantzig, 1954). La possibilità di rappresentare graficamente sia i problemi che il procedimento risolutivo degli esempi con due variabili rende la PL molto attraente anche dal punto di vista didattico.

Per contro è facile osservare che un'eccessiva enfasi posta sull'algoritmo del simplesso tende a dare agli studenti un'idea distorta della Ricerca Operativa: dopo aver imparato ad eseguire manualmente l'operazione di *pivot*, di esercizio in esercizio essi tendono ad identificare la Ricerca Operativa con l'esecuzione noiosa e ripetitiva di un solo algoritmo per un solo tipo di problemi. Non c'è modo peggiore e più controproducente e demotivante di presentare la Ricerca Operativa, la quale invece è anzitutto l'arte di costruire modelli dei problemi decisionali, classificandoli e risolvendoli poi con gli algoritmi e le tecniche più opportune.

2 Richiami teorici

I problemi di *programmazione lineare* sono tali quando sia i vincoli che la funzione obiettivo sono *funzioni lineari delle variabili* e le variabili sono *continue*, cioé hanno un dominio continuo.

Forma alle disuguaglianze. Qualsiasi problema di programmazione lineare in forma generale può essere posto nella forma detta *alle disuguaglianze* nella quale compaiono solo vincoli di disuguaglianza e variabili non-negative. I vincoli di uguaglianza e le variabili libere infatti possono essere eliminati con semplici sostituzioni di variabili. Per convenzione i problemi alle disuguaglianze hanno i vincoli in forma di $\geq$ se sono problemi di minimizzazione e di $\leq$ se sono problemi di massimizzazione. Le condizioni sulle variabili invece sono sempre nella forma $x \geq 0$. I problemi di PL nella forma alle disuguaglianze si prestano alla rappresentazione geometrica (se le variabili non sono più di due o tre, naturalmente). Il sistema dei vincoli forma un *poliedro*; le curve di livello della funzione obiettivo formano un *fascio di rette parallele* (o, più in generale, di iperpiani paralleli). Inoltre, a partire dalla forma alle disuguaglianze è possibile scrivere il problema *duale* di ogni problema di PL.

Forma standard. Per eseguire l'algoritmo del simplesso è necessario mettere i problemi di PL in *forma standard*: essa si ottiene introducendo opportune variabili di *slack* (se i vincoli sono in forma di $\leq$) o di *surplus* (se i vincoli sono in forma di $\geq$), trasformando tutti i vincoli del problema in vincoli di uguaglianza e conservando invece le disuguaglianze $x \geq 0$, sia per le variabili originali sia per quelle di *slack* o *surplus*. Da un problema alle disuguaglianze con n variabili ed m vincoli si ottiene quindi un problema con $n+m$ variabili. Inoltre per convenzione la funzione obiettivo viene posta in forma di minimizzazione e tutti i vincoli vengono posti in modo che la variabile di *slack* o *surplus* abbia coefficiente positivo. Partendo dalla forma alle disuguaglianze occorre quindi cambiare segno o alla funzione obiettivo (se si tratta di un problema di massimizzazione con vincoli $\leq$) o ai vincoli (se si tratta di un problema di minimizzazione con vincoli $\geq$). I coefficienti che compaiono nella forma standard così ottenuta definiscono il *tableau*, la matrice su cui opera l'algoritmo del simplesso.

Forma canonica. Ad ogni iterazione l'algoritmo del simplesso genera una nuova *forma canonica* del problema di PL. Ogni forma canonica corrisponde alla scelta di una *base*. Una base è un sottinsieme di m variabili, che possono essere sia originali sia di *slack* o *surplus*. In ogni forma canonica si distinguono quindi m variabili *in base* e n variabili *fuori base*. Una forma canonica è tale quando i coefficienti delle variabili in base nei vincoli formano una matrice identità ed i coefficiennti delle stesse variabili nella funzione obiettivo sono nulli. Una *soluzione di base* del problema di PL è un punto nel quale il valore delle n variabili fuori base è nullo. Il valore delle m variabili in base si ricava di conseguenza; esso costituisce la soluzione di un sistema lineare di m equazioni in m incognite. Geometricamente una soluzione di base è il punto di intersezione di n iperpiani in uno spazio ad n dimensioni. Una soluzione di base può essere ammissibile o no, a seconda che i valori delle variabili di base rispettino le condizioni di non-negatività o no. Geometricamente le soluzioni di base ammissibili sono i *vertici* del poliedro descritto dai vincoli.

Teorema fondamentale della PL. I problemi di programmazione lineare possono

- essere inammissibili, cioè non ammettere alcuna soluzione che soddisfa tutti i vincoli;

- essere illimitati, cioè consentire di ottimizzare all'infinito (positivo o negativo) il valore della funzione obiettivo;

- ammettere una soluzione ottima finita.

Se un problema di PL ammette una soluzione ammissibile, esso ammette almeno una soluzione ammissibile di base. Se un problema di PL ammette una soluzione ottima finita, esso ammette almeno una soluzione ottima di base.

Questo è il motivo per cui l'algoritmo del simplesso garantisce l'ottimalità della soluzione trovata, pur limitandosi a considerare solo le soluzioni che corrispondono alle forme canoniche, cioè le soluzioni di base.

L'algoritmo del simplesso si arresta dopo un numero finito di passi (posto che per la scelta della colonna da far entrare in base ad ogni iterazione si adotti una politica che consente di evitare cicli infiniti) ma non ha complessità *polinomiale*. È possibile cioè costruire esempi di problemi di PL per cui il numero di iterazioni (passi di *pivot*) richiesti per raggiungere l'ottimo aumenta in modo esponenziale con l'aumentare delle dimensioni del problema (numero di variabili e vincoli). È possibile risolvere i problemi di PL in tempo polinomiale con altri metodi, detti *del punto interno*. Tuttavia dal punto di vista pratico, per la facilità di realizzazione e per la sua efficacia, l'algoritmo del simplesso è tuttora il metodo più usato per risolvere i problemi di PL. Esso si trova già codificato in modo molto efficiente in numerosi solutori *software*.

I metodi del punto interno, così come le varianti dell'algoritmo del simplesso che sfruttano la teoria della dualità, sono solitamente argomento di formazione a livello universitario. Il valore didattico della PL nella scuola consiste in questi aspetti:

- sviluppo delle abilità degli alunni nel formulare modelli matematici di problemi decisionali;

- illustrazione dell'equivalenza della descrizione algebrica e geometrica delle proprietà dei problemi di PL;

- illustrazione della correttezza dell'algoritmo del simplesso nei tre possibili casi di terminazione.

Le proprietà che si possono dimostrare sull'algoritmo sono diretta conseguenza delle proprietà che si possono dimostrare sul problema. Sia delle proprietà che dell'algoritmo è possibile dare due descrizioni equivalenti, una algebrica e una geometrica. Nozioni come continuità, linearità, convessità, unicità della soluzione, trovano un'applicazione molto interessante perché su di esse si fonda un procedimento algoritmico che sfrutta queste proprietà per dare garanzia di risolvere il problema. L'efficacia dell'algoritmo del simplesso può inoltre essere fatta toccare con mano facilmente agli alunni, usando un solutore, anche tra quelli scaricabili gratuitamente dalla rete, per risolvere qualche esempio con migliaia di vincoli e variabili.