

Guida alla risoluzione
degli esercizi di programmazione matematica

Giovanni Righini

12 agosto 2010

1 Il problema

Nei prossimi capitoli i problemi sono presentati in modo informale e corredati da alcuni dati numerici. L'intento è quello di simulare la situazione in cui opera un ricercatore operativo cui viene presentato un problema di ottimizzazione.

L'esercizio consiste nel formulare il problema in termini matematici, classificarlo e risolverlo con i dati forniti nel testo, utilizzando il programma opportuno, cioè il Solver di Excel oppure un solutore di programmazione matematica.

La modellizzazione non può essere eseguita seguendo regole fisse, sempre uguali. Essa richiede invece la capacità di usare alcuni *strumenti* per costruire il modello corretto. Da ciò consegue l'importanza di acquisire una certa dimestichezza con gli esercizi di modellizzazione. Per affinare l'intuito e l'esperienza che consentono di risolvere questo tipo di esercizi, è più opportuno risolvere un numero ristretto di esercizi comprendendoli a fondo, piuttosto che risolverne molti ma in modo superficiale.

Tipicamente si hanno modelli di:

- programmazione lineare,
- programmazione lineare intera,
- programmazione non lineare

a seconda del dominio delle variabili (continuo o discreto) e del tipo di funzioni usate per descrivere l'obiettivo e i vincoli (lineari o no).

Tutti gli esercizi presentati nel seguito sono corredati da una soluzione commentata. È molto raccomandabile che la soluzione sia usata da parte degli alunni solo come verifica, cioè solo dopo aver compiuto un ragionevole sforzo per risolvere l'esercizio senza averla letta.

Come detto, la modellizzazione è la fase più critica e non esiste un procedimento automatico per affrontarla. Una valida guida però è costituita da un insieme di *consigli* sempre validi e da alcune *domande* che è bene porsi e che sono indipendenti dal problema e quindi sono sempre le stesse. Seguire questi consigli e porsi queste domande dovrebbe guidare il ragionamento nella giusta direzione.

Un primo consiglio è quello di *leggere attentamente almeno due volte il testo*. Dal testo dell'esercizio si possono desumere diverse informazioni utili, come verrà illustrato qui di seguito.

Un secondo consiglio è quello di costruire il modello poco per volta, definendo nell'ordine i *dati*, le *variabili*, la *funzione obiettivo* e infine i *vincoli*. A ciascuno di questi quattro passaggi è dedicato uno dei prossimi paragrafi.

1.1 I dati

È importante capire quali dati sono coinvolti nel problema e soprattutto determinare le loro *unità di misura*. Le unità di misura servono per verificare che nella funzione obiettivo e nei vincoli non si sommino o si confrontino grandezze dimensionalmente diverse. L'analisi dimensionale della funzione obiettivo e dei vincoli è uno degli strumenti più efficaci per identificare gli errori: l'esperienza insegna che in percentuale molto alta gli errori nei modelli si possono scoprire anche solo con l'analisi dimensionale.

N.B. Può capitare che alcuni dati forniti nell'esercizio siano ridondanti, cioè non siano necessari a definire il modello né a risolverlo. Tuttavia una tipica domanda da porsi sempre per controllare il modello è: *“Ho usato tutti i dati che mi sono stati forniti?”*. Se si scopre che alcuni dati non sono stati usati, la domanda successiva da porsi è: *“È ragionevole che questi dati siano inutili?”*. Trascurare un dato dopo aver riflettuto ed essersi convinti che è superfluo è cosa ben diversa dal dimenticarsi di usarlo.

1.2 Le variabili

La scelta delle variabili da usare è probabilmente il punto più cruciale nella modellizzazione matematica di un problema. È essenziale spendere del tempo su questa scelta ed essere sempre disposti a ridiscuterla se necessario. Dalla scelta delle variabili dipende infatti il modo in cui vengono espressi la funzione obiettivo ed i vincoli.

La prima tipica domanda da porsi per definire correttamente le variabili è: *“Cosa bisogna decidere in questo problema?”*. Avendo già definito i dati del problema, dovrebbe essere facile capire cosa *non* è dato. La scelta delle variabili deve sempre accompagnarsi alla definizione delle loro *unità di misura*, analogamente a quanto fatto con i dati. Di ogni variabile devono essere chiari (ed è bene che sia scritto esplicitamente in un commento al modello) il significato e l'unità di misura.

Un'altra domanda utile è: *“Quante sono le variabili?”*. Spesso questa domanda è equivalente a: *“Quanti indici ha ogni variabile?”*.

Insieme al significato è necessario specificare anche la natura delle variabili. È fondamentale distinguere se una variabile indica una *quantità* o una *scelta di tipo logico* (vero/falso). Nel primo caso decidere il valore della variabile equivale a decidere quanto, nel secondo caso a decidere se. Le variabili del secondo tipo (che non hanno unità di misura) sono tipicamente variabili binarie, cioè possono assumere solo valore 0 o 1. Le variabili che indicano quantità, invece, possono essere discrete (intere) oppure continue (libere o non-negative). Se il significato e l'unità di misura delle variabili sono stati esplicitati chiaramente, la definizione del loro tipo ne consegue facilmente. A questo proposito è raccomandabile rileg-

gere attentamente il testo dell'esercizio per controllare se nella descrizione data si nasconde qualche assunzione sul fatto che le quantità in gioco possano variare in modo continuo o siano vincolate ad assumere valori discreti, ad esempio multipli di quantità elementari date. Anche le unità di misura possono aiutare in questo senso: ad esempio una "produzione di sedie" o un "numero di persone" possono assumere solo valori interi, mentre "produzione giornaliera di sedie" o "numero di ore-uomo lavorate" potrebbero assumere anche valori frazionari.

La classificazione del problema in *continuo* o *discreto* dipende immediatamente dal tipo di variabili usate. Le variabili discrete devono essere usate solo se è davvero necessario; ogni volta che un problema si può formulare nel continuo, è opportuno farlo.

Spesso per esprimere l'obiettivo o i vincoli risulta molto utile introdurre variabili ridondanti o variabili ausiliarie. Su questo punto ritorneremo qui di seguito.

1.3 La funzione obiettivo

La funzione obiettivo permette di attribuire un valore ad ogni soluzione del problema e quindi di confrontare le soluzioni per stabilire quale sia la migliore. Lo scopo dell'ottimizzazione è di *massimizzare* o *minimizzare* il valore della funzione obiettivo nel rispetto dei vincoli.

Per definire la funzione obiettivo bisogna adottare il punto di vista del decisore e capire in che modo una soluzione possa essere valutata. La domanda da porsi è: "*Date due soluzioni diverse cosa misurerei o calcolerei per decidere quale delle due preferire?*". Spesso negli esercizi proposti si vogliono *massimizzare* ricavi o guadagni oppure *minimizzare* tempi o costi.

Successivamente si deve rappresentare il valore della soluzione in funzione delle variabili decisionali del problema. È a questo punto che può accadere di incontrare difficoltà nel mettere in relazione il valore delle variabili definite in precedenza con il valore della soluzione.

Può darsi che il valore della funzione obiettivo dipenda da quantità che non sono state definite tra le variabili. Domanda da porsi: "*Una volta fissato il valore delle variabili il valore dell'obiettivo risulta determinato o dipende da qualcos'altro?*". Se dipende da qualcos'altro è necessario introdurre le variabili mancanti (ricordandosi di esplicitare il loro significato e la loro unità di misura).

Può anche capitare che le variabili definite in precedenza siano invece sufficienti a determinare il valore della funzione obiettivo, ma il legame tra variabili ed obiettivo risulti complicato da esprimere. È proprio in questi casi che è importante introdurre *variabili ausiliarie*. Quali siano le più utili è determinato proprio dalla necessità di scrivere la funzione obiettivo: le variabili ausiliarie

giuste sono quelle che consentono di esprimere facilmente la funzione obiettivo. Anche per le variabili ausiliarie introdotte per comodità di rappresentazione della funzione obiettivo valgono le stesse raccomandazioni già date in precedenza relativamente al significato e alle unità di misura.

Un ultimo consiglio: la funzione obiettivo deve avere a sua volta un'unità di misura, che deve essere controllata e scritta esplicitamente. Se, come spesso accade, la funzione obiettivo è data dalla somma di più addendi, bisogna controllare che tutti abbiano la stessa dimensione, cioè la stessa unità di misura.

1.4 I vincoli

I vincoli determinano la regione ammissibile del problema, cioè distinguono le soluzioni ammissibili da quelle non ammissibili.

Solitamente i vincoli emergono facilmente dalla lettura attenta del testo dell'esercizio. Alcuni tipi di vincoli si ripetono spesso (vincoli di capacità, vincoli di assegnamento...), altri possono essere più difficili da identificare.

Nel caso dei vincoli è utile seguire il consiglio già indicato in precedenza: controllare di aver usato tutti i dati del problema. Un dato non inserito nel modello può indicare ridondanza di informazione ma può anche rivelare che è stato dimenticato un insieme di vincoli.

Consiglio: di solito un problema di minimizzazione presenta vincoli di \geq mentre un problema di massimizzazione presenta vincoli di \leq . Domanda da porsi, soprattutto se avete tentato di risolvere un modello e avete scoperto che è illimitato: *“Perché non è possibile dare alle variabili un valore infinitamente alto (o basso) in modo da ottenere un valore infinitamente buono per la funzione obiettivo? Quale vincolo lo impedisce?”*.

Anche i vincoli hanno un'unità di misura che deve essere specificata esplicitamente e usata per il controllo dimensionale, come già consigliato per la funzione obiettivo. È particolarmente importante e utile controllare che i due membri della disequazione o equazione abbiano le stesse unità di misura.

Domanda da porsi sempre per ciascun insieme di vincoli: *“Quanti sono i vincoli di questo tipo?”*. Un facile controllo può essere fatto sugli indici: per ogni insieme di vincoli dello stesso tipo considerate gli indici dei dati e delle variabili che vi compaiono e tenete conto del fatto che le sommatorie su un indice fanno “sparire” la dipendenza dei vincoli da quell'indice. Gli indici non assorbiti dalle sommatorie sono indici dei vincoli nel senso che esistono tanti vincoli del tipo considerato quante le possibili combinazioni dei valori degli indici superstiti. Ricordarsi quindi di indicare accanto ad ogni insieme di vincoli il loro numero, solitamente indicando il campo di variabilità di uno o più indici

(ad es. $\forall j = 1, \dots, N$).

Anche per esprimere i vincoli può essere utile ricorrere a variabili ausiliarie, esattamente come per la funzione obiettivo.

Se sono state inserite nel modello variabili ausiliarie, è necessario inserire anche altrettanti vincoli per metterle in relazione alle variabili naturali del problema, cioè a quelle variabili che erano state definite inizialmente e che sono sufficienti a determinare univocamente la soluzione se vengono fissate. I vincoli corrispondenti alle variabili ausiliarie possono essere di uguaglianza o di disuguaglianza a seconda dei casi.

Un caso tipico, che merita di essere evidenziato a parte, è quello delle funzioni obiettivo “min max” (o “max min” per analogia). Quando è richiesto di minimizzare la massima tra N quantità variabili x_i , $i = 1 \dots N$, il modo classico di procedere consiste nell’usare una variabile ausiliaria z che funge da obiettivo, assumendo il significato di $z = \max_{i=1 \dots N} \{x_i\}$, e di introdurre la funzione obiettivo $\min z$ e N vincoli di disuguaglianza del tipo $z \geq x_i \forall i = 1 \dots N$. Si noti che in tal caso i vincoli da introdurre sono N anche se la variabile ausiliaria usata è solo una.

1.5 Commenti ed errori

La scomposizione della risoluzione in vari passi più semplici aiuta a mantenere la complessità dei sottoproblemi a livelli accettabili.

Se durante il processo risolutivo ci si blocca ciò è del tutto normale: niente panico! Quello che importa è identificare le cause: “Perché non riesco ad esprimere questi vincoli?”. Capire le cause è già aver individuato il modo per superare l’ostacolo incontrato. Molto spesso la scelta da ridiscutere è la scelta delle variabili o perché non sono sufficienti, o perché sono ridondanti, o perché non hanno l’unità di misura giusta o perché mancano o non hanno il significato giusto.