Esempi di modelli di programmazione matematica

Un modello matematico di un problema di ottimizzazione è costituito in generale da:

- *dati*, che rappresentano le quantità note,
- *variabili*, che rappresentano le decisioni da prendere, ossia le quantità che possono assumere valori diversi,
- *vincoli*, cioè equazioni e disequazioni che devono essere soddisfatte affinché i valori delle variabili costituiscano una soluzione *ammissibile*,
- *funzione obiettivo*, che indica la quantità che si vuole ottimizzare e che dipende dalle variabili.

Ulteriori riferimenti all'argomento si possono trovare su qualsiasi testo introduttivo alla Ricerca Operativa. Ad esempio:

- C. Vercellis, *Modelli e Decisioni*, Ed. Esculapio, Bologna 1997
- R. Tadei, F. Della Croce, *Ricerca Operativa e Ottimizzazione*, Ed. Esculapio, Bologna 2002

Si riportano qui di seguito alcuni esempi di modelli di programmazione matematica.

N.B.: Gli esempi non sono stati scelti a caso: la loro comprensione dovrebbe costituire un valido punto di partenza per la modellizzazione del problema dei furgoncini di Algoritmia.

Il problema dello zaino

Dato un insieme di N oggetti ciascuno con un dato peso, bisogna decidere quali di essi inserire in uno zaino di data capacità. Ogni oggetto ha un'utilità associata e si vuole massimizzare l'utilità complessiva degli oggetti scelti.

Dati

- Un insieme di oggetti numerati da 1 a N;
- il peso a_j di ogni oggetto $j = 1, \ldots, N$ [chilogrammi];
- il massimo peso consentito dallo zaino, b [chilogrammi];
- il valore di ogni oggetto $j = 1, \ldots, N$ [utilità].

Variabili

- Una variabile binaria x_j per ogni oggetto $j = 1, \ldots, N$: $x_j = 1$ se e solo se l'oggetto j viene messo nello zaino (3).

Vincoli

- La somma dei pesi degli oggetti scelti non può eccedere la capacità dello zaino [chilogrammi] (2).

Obiettivo

- Massimizzare il valore complessivo degli oggetti messi nello zaino [utilità] (1).

Il modello matematico

$$\max \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{N} a_j x_j \leq b \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j = 1, \ldots, N \tag{3}$$

Il modello è lineare. Le variabili sono binarie. Questo modello viene quindi classificato come modello di programmazione lineare intera (binaria).

Il problema del Bin Packing

Dato un insieme di N oggetti ciascuno con un dato peso, bisogna allocarli al minimo numero di contenitori (*bins*) di capacità limitata.

Dati

- Un insieme di oggetti numerati da 1 a N;
- un insieme di contenitori numerati da 1 a M;
- il peso a_i di ogni oggetto $i = 1, \ldots, N$ [chilogrammi];
- il massimo peso consentito in ogni contenitore, b [chilogrammi].

Variabili

- Una variabile binaria y_j per ogni contenitore $j = 1, \ldots, M$: $y_j = 1$ se e solo se il contenitore j viene usato (8);
- una variabile binaria x_{ij} per ogni oggetto $i = 1, \ldots, N$ e per ogni contenitore $j = 1, \ldots, M$: $x_{ij} = 1$ se e solo se l'oggetto i viene allocato al contenitore j (7).

Vincoli

- Tutti gli oggetti devono essere allocati (5);
- la somma dei pesi degli oggetti allocati nello stesso contenitore non può eccedere la capacità del contenitore [chilogrammi] (6).

Obiettivo

- Minimizzare il numero complessivo di contenitori usati (4).

Il modello matematico

$$\min \sum_{j=1}^{N} y_j \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, N \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_{ij} \leq b y_j \qquad \forall j = 1, \ldots, N \tag{6}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j = 1, \ldots, N \tag{7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, N \quad \forall j = 1, \ldots, N \tag{8}$$

Il modello è lineare. Le variabili sono binarie. Questo modello viene quindi classificato come modello di programmazione lineare intera (binaria).

Il problema del Cammino Minimo

Dato un grafo orientato e pesato e dati due nodi s e t appartenenti al grafo, trovare il cammino di minimo costo dal nodo s al nodo t.

Dati

- Un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ dove $\mathcal{N}$ è l'insieme dei nodi ed $\mathcal{A}$ è l'insieme degli archi (coppie ordinate di nodi);
- una pesatura degli archi $c : \mathcal{A} \mapsto \Re^+$, che associa un costo c_{ij} non-negativo alla percorrenza del generico arco (i, j);
- due nodi s e t appartenenti all'insieme $\mathcal{N}$.

Variabili

- Una variabile binaria x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in \mathcal{A}$: $x_{ij} = 1$ se e solo se l'arco (i, j) viene percorso (13).

Vincoli

- Il grado entrante di ogni nodo deve essere uguale al suo grado uscente (10), tranne che nel caso di s, che ha solo un arco uscente (11), e t, che ha solo un arco entrante (12).

Obiettivo

- Minimizzare il costo complessivo degli archi percorsi (9).

Il modello matematico

$$\min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{N}\setminus\{s,t\} \tag{10}$$

$$\sum_{(j,s)\in\mathcal{A}} x_{js} - \sum_{(s,j)\in\mathcal{A}} x_{sj} = -1 \tag{11}$$

$$\sum_{(j,t)\in\mathcal{A}} x_{jt} - \sum_{(t,j)\in\mathcal{A}} x_{tj} = 1 \tag{12}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \tag{13}$$

Il modello è lineare. Le variabili sono binarie. Questo modello viene quindi classificato come modello di programmazione lineare intera (binaria).