

1 Il tappeto

Orrore! Ci sono dei graffi sul parquet del salotto. Bisogna nasconderli sotto un tappeto rettangolare di minima area, che va posizionato in modo ottimale.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto in Tabella 1, discutendo ottimalità e unicità della soluzione trovata.

Esempio.

Graffio	x	y
1	2	6
2	-10	-8
3	-6	13
4	15	-1
5	-5	-5
6	8	4
7	13	7

Table 1: Posizione dei graffi in un sistema di riferimento Cartesiano.

Soluzione.

Dati. Sono dati un insieme indicizzato N di punti nel piano e le coordinate $(x_i, y_i) \forall i \in N$.

Variabili. Rappresentiamo il rettangolo cercato con l'equazione delle quattro rette che ne contengono i lati. Definiamo quindi un insieme indicizzato R di rette e le variabili $(a_j, b_j, c_j) \forall j \in R$. Ogni terna di coefficienti descrive l'equazione in forma generale di una *retta orientata* $ax + by + c = 0$.

Vincoli. Per escludere il caso patologico $a = b = c = 0$, che non corrisponde ad una retta, e per normalizzare i coefficienti, imponiamo anzitutto

$$a_j^2 + b_j^2 = 1 \quad \forall j \in R.$$

Come conseguenza di questa normalizzazione, è possibile definire la *distanza con segno* di un punto da una retta: i punti a destra hanno distanza positiva, quelli a sinistra hanno distanza negativa.

Imponiamo poi che le rette con indici consecutivi siano perpendicolari e che quelle con indici a differenza 2 siano anti-parallele, cioè con uguale direzione ma orientamento opposto.

$$a_j a_{j+1} + b_j b_{j+1} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, 3.$$

$$a_j a_{j+2} + b_j b_{j+2} = -1 \quad \forall j = 1, 2.$$

Infine, imponiamo che tutti i punti dati giacciono a destra di ciascuna retta.

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j \geq 0 \quad \forall i \in N, j \in R.$$

Questo significa imporre che le rette orientate descrivano il perimetro del rettangolo percorso in senso orario.

Obiettivo. Per esprimere l'area del rettangolo, bisogna calcolare la lunghezza dei due lati, cioè la distanza tra coppie di rette parallele. Grazie alle ipotesi fatte, tale distanza è data dalla somma dei termini noti. Pertanto l'obiettivo è

$$\text{minimize } z = (c_1 + c_3)(c_2 + c_4).$$

Classificazione. Il problema è non-lineare nel continuo. Non è convesso: è facile immaginare esempi in cui ruotando un rettangolo la soluzione diventa a volte ammissibile e a volte no.