1 Angoli tra rette

1.1 Rette orientate e loro rappresentazione

Consideriamo una retta in forma generale $ax + by + c = 0$. Calcoliamo il fattore di normalizzazione $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se la retta esiste, si ha certamente $r > 0$, poiché non può essere $a = b = 0$, che è l'unico caso in cui r può avere valore nullo. Quindi è sempre possibile normalizzare i coefficienti dell'equazione, dividendoli per r. Si ha così una rappresentazione equivalente della retta, $a'x + b'y + c' = 0$, dove $a' = a/r$, $b' = b/r$ e $c' = c/r$. I coefficienti normalizzati a' e b' sono interpretabili come seno e coseno di un angolo, dato che $a'^2 + b'^2 = a^2/r^2 + b^2/r^2 = (a^2 + b^2)/r^2 = 1$.

Ponendo $a' = \sin\alpha$ e $b' = -\cos\alpha$, l'angolo α è quello formato dalla retta p con il semiasse positivo delle ascisse, seguendo la convenzione di misurare gli angoli in senso antiorario.

Per esempio, la retta per l'origine di equazione $3x - 4y = 0$ passa per l'origine e per il punto $P = (4, 3)$ nel primo quadrante. Il suo fattore di normalizzazione è $r = 5$. L'equazione normalizzata è $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 0$. L'angolo α ha $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ed è infatti compreso tra 0 e $\pi/2$ (primo quadrante).

La stessa retta passa anche per il punto $Q = (-4, -3)$. La sua equazione normalizzata è $(-\frac{3}{5})x - (-\frac{4}{5})y = 0$, che corrisponde ad un angolo β con $\sin\beta = -\frac{3}{5}$ e $\cos\beta = -\frac{4}{5}$, cioè un angolo compreso tra π e $3\pi/2$ (terzo quadrante).

Alla stessa retta corrispondono quindi due rappresentazioni, con coefficeinti di segno opposto.

Rappresentare una retta tramite il suo corrispondente angolo, ossia tramite la coppia (seno, coseno) di quell'angolo, consente di rappresentare la *retta orientata*. Finché si usano equazioni non si vede alcuna differenza, ma se si introducono le disequazioni il concetto di retta orientata diventa molto utile.

1.2 Rette orientate e semipiani

Così come la retta è il luogo dei punti che soddisfano un'equazione (in particolare un'equazione lineare, del tipo $ax+by+c = 0$), un semipiano è il luogo dei punti che soddisfano una delle due corrispondenti disequazioni, cioè $ax + by + c \geq 0$ e $ax + by + c \leq 0$.

Quando si considerano i semipiani definiti da una retta, è necessario tenere conto dell'orientamento della retta, poiché invertire l'orientamento, cioè cambiare di segno ai coefficienti della retta, significa scambiare tra loro i due semipiani.

Come abbiamo visto sopra, una retta orientata corrisponde ad un angolo: quello formato dalla retta col semiasse positivo delle ascisse, misurato in senso antiorario. Nel caso di retta per l'origine, dall'angolo α si ricava l'equazione $(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y = 0$.

La retta così rappresentata è orientata dall'origine verso il punto P di coordinate $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, che è l'intersezione della retta con la circonferenza goniometrica che corrisponde all'angolo α.

Il semipiano a destra della retta orientata soddisfa la disequazione $(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y \geq 0$, mentre quello a sinistra soddisfa la disequazione $(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y \leq 0$.

La stessa retta orientata in direzione opposta corrisponde all'angolo $\beta = \pi + \alpha$ ed è quindi orientata dall'origine al punto Q di coordinate $(\cos\beta, \sin\beta)$, cioè $(\cos\pi + \alpha, \sin\pi + \alpha)$, cioè $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$. Quindi Q è il punto simmetrico a P rispetto all'origine. Per la retta orientata OQ il semipiano a destra soddisfa la disequazione $(\sin\beta)x - (\cos\beta)y \geq 0$, che equivale a $(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y \leq 0$; quindi, esso corrisponde al semipiano posto a sinistra della retta orientata OP.

Se si considerano rette non passanti per l'origine, valgono le stesse considerazioni con l'unica accortezza di normalizzare anche il termine noto.

1.3 Distanza con segno tra punto e retta

La formula della distanza tra un punto $P = (x_P, y_P)$ ed una retta $ax + by + c = 0$ è

$$\frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tale formula non permette però di distinguere tra punti a destra e a sinistra della retta, poiché la distanza è definita come quantità sempre non-negativa.

In molti casi, invece, è necessario avere questa informazione, soprattutto quando si lavora con vincoli lineari espressi da disequazioni, cioè si vuole imporre che un punto giaccia a destra o a sinistra rispetto ad una retta orientata. Perciò è utile introdurre il concetto di *distanza con segno* e riferirsi alla rappresentazione della *retta orientata*.

Sia α l'angolo corrispondente ad una retta orientata di equazione $ax + by + c = 0$. Siano a, b e c i coefficienti ottenuti dopo la normalizzazione dell'equazione, in modo che si abbia $a^2 + b^2 = 1$. Allora la distanza con segno di un punto $P = (x_P, y_P)$ dalla retta orientata è

$$ax_P + by_P + c.$$

Infatti il valore assoluto al numeratore non viene più utilizzato, per conservare l'informazione sul segno, ed il denominatore sparisce, poiché è pari a 1, grazie alla normalizzazione. Inoltre, come dimostrato in precedenza si ha $a = \sin\alpha$ e $b = -\cos\alpha$.

I punti a distanza positiva dalla retta orientata sono quello posti a destra; i punti a distanza negativa sono quelli posti a sinistra.

Corollario. Se si considera il particolare punto $P = (0, 0)$ si osserva che la sua distanza dalla retta orientata è pari a c. Quindi il termine noto normalizzato c è pari alla distanza con segno dell'origine dalla retta orientata.

Quindi, se conosciamo l'angolo α e la distanza dell'origine dalla retta, possiamo scrivere immediatamente l'equazione dellla retta orientata

$$(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y + c = 0,$$

da cui si ottengono annche le due disequazioni corrispondenti ai semipiani a destra e a sinistra.

1.4 Prodotto scalare e angolo tra due direzioni

Consideriamo due direzioni, rappresentate da due rette orientate p e q. Sia γ l'angolo compreso tra di esse. Vogliamo trovare la relazione che intercorre tra γ ed i coefficienti delle equazioni delle due rette.

Siano α e β i due angoli corrispondenti alle due rette orientate. Consideriamo le equazioni delle due rette orientate, $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$, dove $a = \sin\alpha$, $b = -\cos\alpha$, $d = \sin\beta$ e $e = -\cos\beta$, come mostrato in precedenza.

Per comodità trasliamo il sistema di riferimento in modo che l'origine sia nel punto di intersezione tra le due rette. Le due equazioni diventano pertanto $ax + by = 0$ e $dx + ey = 0$.

Consideriamo il punto P lungo la retta orientata p posto a distanza 1 dall'origine. Esso ha ascissa $-b = \cos\alpha$ e ordinata $a = \sin\alpha$. Consideriamo il punto Q lungo la retta orientata q posto a distanza 1 dall'origine. Esso ha ascissa $-e = \cos\beta$ e ordinata $d = \sin\beta$.

Consideriamo i due vettori OP e OQ, le cui componenti sono le coordinate dei due punti P e Q rispettivamente. La proiezione di un vettore sull'altro è data dal *prodotto scalare* tra P e Q, cioè dalla somma dei prodotti delle loro componenti, ossia $(-b)(-e) + ad$. Detta H la proiezione di P su OQ, considerando il triangolo OPQ che è rettangolo in H per costruzione, osserviamo che la lunghezza del cateto OH è pari a quella dell'ipotenusa OP per il coseno dell'angolo compreso, cioè γ. Quindi

$$be + ad = \cos\gamma$$

è la relazione cercata.

Sostituendo ad a, b, d ed e le funzioni di α e β, si ottiene

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Al secondo membro compare la formula che esprime il coseno della differenza tra due angoli e infatti $\gamma = \alpha - \beta$.

Il prodotto scalare tra due vettori indica la lunghezza della proiezione di uno sull'altro. La costruzione si può ripetere simmetricamente proiettando Q sul segmento OP e ottenendo lo stesso risultato. Quindi, il prodotto scalare tra vettori è commutativo, proprio come le moltiplicazioni tra scalari.

Se i due vettori sono normalizzati, cioè di lunghezza unitaria, il loro prodotto scalare è il coseno dell'angolo compreso e può assumere solo valori compresi tra -1 e 1. Il prodotto scalare vale -1 quando i vettori hanno la stessa direzione ma orientamento opposto e vale 1 quando hanno la stessa direzione e lo stesso orientamento (cioè sono sovrapposti). Quando i due vettori sono perpendicolari, il prodotto scalare vale 0.

Corollario. Queste considerazioni ci suggeriscono un modo per imporre la condizione di perpendicolarità tra due rette nel piano. Due rette di equazione $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$ sono perpendicolari se e solo se

$$ad + be = 0.$$

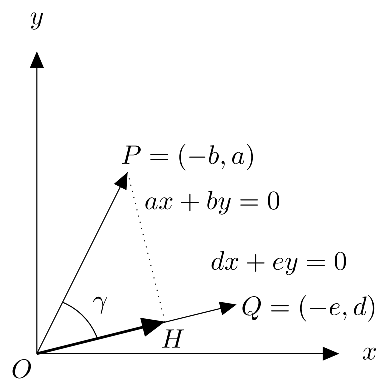
Analogamente la condizione di parallelismo è

$$ad + be = 1$$

e quella di anti-parallelismo (stessa direzione ma orientamento opposto) è

$$ad + be = -1.$$

Si noti che queste condizioni sono valide in generale e non richiedono alcuna ipotesi aggiuntiva. In particolare, valgono anche nel caso in cui le rette siano verticali, dove il coefficiente angolare non ha un valore finito.



2 Localizzazione di un punto

Poniamoci ora il problema inverso. Conosciamo la posizione di un punto O e quella di un punto A; conosciamo l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$ e la distanza $\overline{OB}$; vogliamo determinare le coordinate di B.

Senza perdita di generalità possiamo ipotizzare che O sia l'origine del sistema di riferimento. Se così non fosse, potremmo sempre riformulare il problema dopo aver traslato il sistema di riferimento in modo da verificare la condizione.

Indichiamo con γ l'ampiezza di $A\hat{O}B$, valutato da OA verso OB: se B è alla sinistra della retta orientata OA, si ha $0 \le \gamma \le \pi$; se invece B è alla destra della retta orientata OA, si ha $-\pi \le \gamma \le 0$.

Dalla posizione di $A = (x_A, y_A)$, otteniamo la direzione della retta orientata OA, di equazione

$$y_A x - x_A y = 0.$$

Normalizzando i coefficienti, si ha

$$\frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} x - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} y = 0.$$

La normalizzazione dei coefficienti della retta orientata OA consente di interpretare i due coefficienti come seno e coseno di un angolo, poiché la somma dei loro quadrati è uguale a 1. Sia

$$\frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \sin\alpha \qquad \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \cos\alpha,$$

dove α è l'angolo formato dalla direzione OA con il semiasse positivo delle ascisse. Da questa coppia di valori si ottiene quindi univocamente l'angolo α, con $0 \le \alpha < 2\pi$.

Analogamente, sia β l'angolo tra il semiasse positivo delle ascisse e la retta orientata OB. Per costruzione sappiamo che

$$\beta = \alpha + \gamma$$

e quindi sappiamo che

$$\sin\beta = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$$

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma.$$

Avendo già ricavato $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ e conoscendo il dato γ, possiamo quindi calcolare $\sin\beta$ e $\cos\beta$.

N.B. Ogni volta che si calcola la somma algebrica (cioè, col segno) di due angoli è opportuno ricondurre il risultato tra 0 e 2π.

Quindi, il punto B da localizzare è in direzione $(\cos\beta, \sin\beta)$ da O e a distanza data $\overline{OB}$ da O. Pertanto

$$B = (\overline{OB}\cos\beta, \overline{OB}\sin\beta).$$