

Contenuti

Coerentemente con quanto osservato a proposito degli obiettivi, nella definizione dei contenuti è opportuno insistere maggiormente su quelli *modellistici* per raccordare la Ricerca Operativa con l'insegnamento della matematica e su quelli *algoritmici* per raccordarlo con l'insegnamento dell'informatica. Dovendo dare la precedenza ad uno dei due è da scegliere il primo, per l'effetto che ha sulla motivazione allo studio dell'analisi, dell'algebra e della geometria.

Inoltre, sempre per coerenza con gli obiettivi didattici dichiarati in precedenza, l'insegnamento della Ricerca Operativa non deve consistere nell'aggiunta di *contenuti specialistici*, sganciati dal resto del programma di matematica, bensì nell'insegnamento di una *forma mentis*, di un approccio razionale alla formalizzazione e alla risoluzione dei *problemi decisionali*.

I contenuti andrebbero quindi determinati in funzione del loro *collegamento con il resto del programma di matematica (e di informatica)*. Le possibilità sono moltissime. Ecco qualche esempio.

Nozioni di base

Problemi decisionali e loro formalizzazione: dati, parametri, variabili, vincoli, obiettivi.

Dai problemi con una sola soluzione ai problemi con molte soluzioni possibili:

Esempio da scuola elementare

Versione 1: "La mamma compra due confezioni da sei uova ciascuna, ma tornando a casa ne rompe una per ogni confezione. Quante gliene rimangono per fare le torte di compleanno?"

Versione 2: "Per fare le torte di compleanno alla mamma servono *almeno* (vincolo) dieci uova. Quante confezioni da sei uova deve comprare *come minimo* (funzione obiettivo)? E quante uova può rompere tornando a casa?"

Logica e variabili booleane

Uso delle variabili binarie per rappresentare condizioni logiche.

Esempio: I "Quesiti con la Susi" della "Settimana Enigmistica" e quiz logici come il Sudoku.

Geometria: la retta

La rappresentazione dei vincoli lineari di un problema come rette nel piano e della regione ammissibile del problema come un poligono nel piano.

Rappresentazione delle curve di livello di un problema lineare come fascio di rette parallele nel piano.

Teorema fondamentale della PL ed interpretazione geometrica. Soluzione per via geometrica della programmazione lineare.

Traslazione e rotazione di rette nel piano (fasci di rette con parametro): analisi di sensitività nella programmazione lineare.

Programmazione lineare a due obiettivi. Dominanza, regione Paretiana, metodo dei pesi e dei vincoli.

Geometria analitica: le coniche nel piano

Tangenza e passaggio per un punto come casi limite, cioè come soluzioni ottime di problemi che hanno come vincolo l'intersezione o la non-intersezione tra luoghi di punti.

Esempio:

Versione 1: "Trovare la circonferenza (o l'ellisse) tangente a tre rette date"

Versione 2: “Trovare *la più grande* (obiettivo) circonferenza (o ellisse di eccentricità data) che si può inscrivere (vincolo) in un dato triangolo (o altro poligono) e *la più piccola* (obiettivo) che si può circoscrivere (vincolo) allo stesso triangolo (o altro poligono).”

Introduzione per via geometrica alla teoria della dualità.

Esempio:

Qual è il rettangolo di area massima che si può inscrivere in una data ellisse e qual è l'ellisse di area minima che si può circoscrivere ad un dato rettangolo?

Relazione tra linearità/non-linearità e unicità/non-unicità delle soluzioni di un problema di esistenza.

Analoga relazione tra convessità/non-convessità e unicità/non-unicità delle soluzioni ottime di un problema di ottimizzazione. Il concetto di “intorno” e di “ottimo locale”.

Esempio:

Esistenza: “Quante possono essere le intersezioni tra due rette nel piano? E tra una retta e una conica?”

Ottimizzazione: “Quali sono i punti di una retta data che si trovano a minima distanza da un dato punto P? [una sola soluzione, dovunque sia P] E quelli di una conica data? [soluzione unica se P è “fuori” della conica, soluzioni multiple se P è “dentro” la conica]”

Geometria nel piano con elementi discreti

Suddivisioni del piano, diagrammi di Voronoi, triangolazione di Delaunay.

Localizzazione ottima di punti e di figure nel piano.

Esempio: “Qual è la massima (obiettivo) densità di punti che si possono localizzare nel piano in due dimensioni ad una data distanza minima tra loro (vincolo)?” (E perché le celle delle api sono esagonali...? La natura ottimizza? E dove si posizionano le antenne per la telefonia mobile...?)

Algebra lineare

Sistemi lineari con più variabili che equazioni. Basi e soluzioni di base, interpretazione geometrica e interpretazione algebrica.

Calcolo combinatorio, conteggio delle soluzioni di base.

Operazioni su matrici, matrice inversa.

Algoritmo del simplesso.

Geometria in spazi discreti

Rivisitazione della programmazione lineare e della sua interpretazione geometrica quando le variabili sono intere.

Il concetto di lattice. La nozione di rilassamento di un problema di ottimizzazione.

Analisi matematica e studio di funzione

Problemi di ottimizzazione in una sola variabile. Con la derivata: metodo di bisezione; senza la derivata: metodo dei numeri di Fibonacci.

Soluzione per via analitica di problemi di ottimizzazione non-lineare in una variabile.

Problemi di massimo e minimo in più di 2 dimensioni senza vincoli: algoritmo del gradiente, metodo di Newton.

Grafi e problemi su grafo.

Grafi: definizioni e proprietà. Esempi di uso dei grafi come strumento modellistico.

Esempi di problemi di ottimizzazione su grafo e loro applicazioni: alberi, cammini, circuiti Euleriani ed Hamiltoniani.

Algoritmi di ottimizzazione su grafo. Relazioni con l'Informatica.

Simulazione

Diversi tipi di simulazione: simulazione numerica, simulazione discreta.

Relazioni della prima con l'analisi numerica e della seconda con la statistica.

Semplici modelli di teoria delle code risolvibili analiticamente, catene di Markov.

Esempi:

Simulazione numerica: Simulare al calcolatore la traiettoria di un proiettile, con e senza attrito.

Simulazione discreta: Simulare al calcolatore un sistema di code (confronto tra incrocio con semaforo e incrocio con rondò).