LA RICERCA OPERATIVA:
UNA STRATEGIA MULTIFUNZIONE PER LA SCUOLA SUPERIORE

Summary

With this work, I mean to demonstrate that operational research may supply a methodological teaching approach to the development of the whole mathematic teaching course in the upper middle schools, following a strong multipurpose vocation.
Operational research contemplates the intensive use of laboratories, being, par excellence, a multidisciplinary subject, the link between mathematics and computer science.
Very effective on motivation, aimed to modeling and problem solving, it represents a concrete answer to the demands that many Italian students reveal in international surveys.

Sommario

In questo lavoro mi propongo di mostrare come la Ricerca Operativa possa costituire un approccio didattico-metodologico allo sviluppo dell'intero percorso di studio della matematica nella Scuola Secondaria di Secondo Grado, a spiccata vocazione *multipurpose*. Tema multidisciplinare per eccellenza, *trait d'union* tra la matematica e l'informatica (intesa come *Computer Science*), la Ricerca Operativa consente una didattica laboratoriale "*forte*". Molto efficace in termini di motivazione, mirata al modeling e alla risoluzione di problemi, essa rappresenta una risposta concreta alle lacune evidenziate dagli studenti italiani nelle indagini internazionali.

Alberta Schettino

LA RICERCA OPERATIVA: UNA STRATEGIA MULTIFUNZIONE PER LA SCUOLA SUPERIORE

ALBERTA SCHETTINO, POLO TECNOLOGICO IMPERIESE,
UNIVERSITÀ TELEMATICA DELLE SCIENZE UMANE - UNISU

Introduzione

La Ricerca Operativa (nel seguito R.O.) è una disciplina che utilizza metodi quantitativi e scientifici per la risoluzione di problemi decisionali. Un problema decisionale è un problema in cui si devono compiere scelte fra diverse alternative, nel rispetto di determinati obiettivi e vincoli. Scopo della R.O. è la formulazione di modelli matematici che fungano da supporto alle decisioni. In particolare la R.O. si occupa di allocare risorse massimizzando o minimizzando una funzione obiettivo.

La R.O. è, per sua natura, a carattere fortemente interdisciplinare: fornisce strumenti matematici e informatici per trattare problemi che investono svariati ambiti, quali la logistica e i trasporti, la finanza, la gestione e il controllo della produzione industriale, la comunicazione e le telecomunicazioni, la gestione del personale, l'ambiente e l'energia, la sanità, i servizi e le pubbliche amministrazioni. È un settore che recentemente ha subito una rapida espansione e la professione del "ricercatore operativo" è diventata molto richiesta e ben remunerata a livello internazionale.

Dal punto di vista "scolastico", essa costituisce un approccio didattico-metodologico allo sviluppo dell'intero percorso di studio della matematica nella Scuola Secondaria di Secondo Grado, molto efficace in termini di motivazione e mirato al modeling e alla risoluzione dei problemi, rappresentando una risposta concreta alle lacune evidenziate dagli studenti italiani nelle indagini internazionali.

Finora la R.O. ha avuto una rilevanza risibile nei programmi di matematica della scuola italiana e questa tendenza è confermata dalle Linee guida dei nuovi istituti superiori e dagli Obiettivi specifici di apprendimento per

i licei della riforma del Ministro Gelmini, nella quale la R.O. è sostanzialmente assente.
In questo lavoro, dopo aver passato in rassegna l'insegnamento della R.O. in Italia e all'estero (paragrafo 1), propongo la R.O. come strumento di intervento sull'″emergenza matematica″ evidenziata dalle indagini OCSE PISA (paragrafo 2). Nel paragrafo 3 descrivo alcune mie esperienze di insegnante di matematica nei confronti della R.O., con i giochi AIRO (Associazione Italiana di Ricerca Operativa[1]) dal 2009 al 2011. Infine (paragrafo 4) accenno alla vocazione multifunzione della R.O., in particolare alla sua stretta interconnessione con l'informatica, che potrebbe fornire strumenti affatto nuovi e "attrattivi" per inserire elementi e metodi dell'informatica nel piano di lavoro di matematica.

1. La Ricerca Operativa nella scuola italiana e all'estero

Le fasi di uno studio di R.O. possono essere così sintetizzate: a partire dall'*analisi* di un problema, lo si traduce in un *modello* algebrico (fase di modeling); in base alle caratteristiche del modello si progetta un *algoritmo* risolutivo; la *soluzione* fornita consente al decisore di effettuare la scelta più opportuna. La R.O. si configura come disciplina intrinsecamente trasversale alla matematica e all'informatica; rappresentare problemi decisionali (di modeste dimensioni) tramite modelli matematici e utilizzare gli strumenti tecnologici disponibili per risolverli è un obiettivo formativo alla portata degli studenti della scuola secondaria di secondo grado, con ricadute di notevole impatto sulla motivazione e l'autonomia di pensiero.
Nella scuola secondaria italiana, storicamente, la R.O. è stata relegata a settore di scarsa rilevanza. Nelle indicazioni ministeriali degli ultimi trent'anni del Liceo non v'è traccia di temi, contenuti o percorsi inerenti la R.O. Per alcuni Istituti Tecnici e Professionali i programmi degli anni 90 e seguenti prevedevano al quinto anno un *tema* di "Matematica Finanziaria e Ricerca Operativa" i cui conte-

[1] http://www.airo.org

nuti si condensano in problemi di ottimizzazione in una e in due variabili e programmazione lineare (metodo del Simplesso). Una menzione a parte merita l'Istituto Tecnico Industriale per l'Informatica – Progetto "Abacus", che tra le discipline d'insegnamento prevedeva "Calcolo delle probabilità, Statistica e Ricerca Operativa"; in ogni caso la R.O. veniva introdotta solo a metà del quinto anno.

La riforma del Ministro Gelmini, entrata in vigore il primo settembre 2010, non dedica particolare e rinnovata attenzione alla R.O., né come tema autonomo a sé stante né come percorso verticale e trasversale a tutta la matematica. Se si analizzano gli "obiettivi specifici di apprendimento" di Matematica relativi al primo biennio di Licei[2] e Istituti Tecnici[3] concernenti i due temi "Relazioni e Funzioni" e "Dati e Previsioni" risulta evidente che l'attenzione riservata alla R.O. è pressoché nulla (viene esplicitamente riferita solo come "contesto"); eppure, i due temi contengono tutti gli ingredienti per progettare percorsi di R.O., in particolare di Programmazione Lineare (P.L.): funzioni, equazioni e disequazioni lineari, sistemi di equazioni e di disequazioni. Con questi pochi oggetti è possibile fornire agli studenti molti esempi di problemi "reali", contestualizzati, e dotarli degli strumenti, anche informatici, sufficienti a risolverli. L'algoritmo del Simplesso, che può essere derivato per via geometrica, analitica, e algebrica, consente, già in un secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, il modeling e la risoluzione di una vasta gamma di problemi "reali", per quanto di dimensioni modeste, inerenti diversi ambiti. È possibile inoltre introdurre la teoria della dualità nella P.L., aprendo così la strada al concetto di equilibrio domanda/offerta in contesto economico (cfr. par. 2).

Gli altri due temi presenti, "Aritmetica e Algebra", e "Geometria", non contengono alcuna indicazione che possa in qualche modo coinvolgere la R.O.. La situazione non sembra molto diversa se si

[2] http://nuovilicei.indire.it
[3] http://nuovitecnici.indire.it

considerano le linee guida relative al secondo biennio e al quinto anno dei Licei, gli unici istituti per i quali le commissioni incaricate hanno terminato i lavori. Si parla di "concetto di modello matematico", quasi sempre contestualizzato in ambito statistico/probabilistico, e di "idea generale di ottimizzazione", senza mai fare ricorso alla Teoria dei Modelli in senso più ampio e alla R.O. come tema autonomo. Non ci sono indizi che lascino presupporre che le commissioni incaricate di stilare le indicazioni per gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali effettuino, sui trienni superiori, scelte radicalmente diverse da quelle testé descritte.
Per contro, dal 2008 la professione del "ricercatore operativo" è diventata una delle dieci più richieste e meglio remunerate del mercato del lavoro negli USA (Balderrama 2010). Pubblicazioni recenti, quali "*Math Will Rock Your World*", "*Competing on Analytics*", "*The numerati*", "*Super Crunchers*", "*The New Know*", hanno posto in evidenza l'importanza decisiva che oggi riveste l'uso dei *modelli matematici* e degli *algoritmi di calcolo* di R.O in moltissimi contesti, soprattutto per quel che riguarda la competitività delle aziende, la qualità dei servizi ai cittadini, lo sviluppo della tecnologia, la crescita dell'economia e la creazione di nuovi posti di lavoro, il benessere della società.
Anche l'ambiente dell'istruzione negli USA, a partire dal Dipartimento dell'Educazione (U.S. Department of Education, 2008), focalizza l'attenzione su una nuova dimensione dell'insegnamento della matematica all'insegna della R.O. (Mehrotra, 2006; Daskin 2006; Chelst, Edwards, Young, Keene, Royster, 2008). Nei principali paesi occidentali sono già in atto importanti iniziative per l'introduzione della R.O. nelle scuole superiori. La più famosa è la *High School Operations Research* (HSOR[4]) attivata nel 1996 da Kenneth Chelst e Thomas Edwards (Wayne State University, Michigan, USA) per l'introduzione della R.O. nelle scuole superiori statunitensi. Gli autori hanno scritto un testo *"Does this line ever move?"* con esercizi per insegnanti e studenti su argomenti diversi

[4] http://www.hsor.org

come la programmazione matematica, la teoria delle code, l'ottimizzazione su grafo, la probabilità, la simulazione, l'analisi dei dati. Il programma HSOR ha dato origine al progetto quadriennale MINDSET, che ha ricevuto nel 2008 un finanziamento di 3 milioni di dollari da parte della National Science Foundation, con l'obiettivo di introdurre la R.O. in tutte le scuole superiori del North Carolina e del Michigan. Tale azione è stata messa in opera come risposta alla constatazione del deficit mostrato dagli studenti statunitensi nelle valutazioni internazionali in matematica. In Europa si possono segnalare almeno due esempi significativi: il *Management Mathematics for European Schools* (*MaMaEuSch*[5]), progetto sviluppato da università tedesche e spagnole con finanziamenti dell'Unione Europea, e il sito inglese *Learn About O.R.*[6], che contiene materiale divulgativo sulla R.O. pensato per le diverse fasce di età, a partire dagli 11 anni.

2. I test OCSE-PISA e la Ricerca Operativa

La stampa nazionale ha dato forte risalto ai deludenti risultati degli studenti italiani nell'indagine PISA 2006; il rapporto nazionale dell'INVALSI su Pisa 2009 è, invece, talmente recente da non aver ancora avuto sufficiente rilievo mediatico. Nel 2009 l'Italia, con un punteggio di 483 punti, ha ottenuto un risultato migliore rispetto a PISA 2006 in cui aveva una media di 462 e a PISA 2003 in cui aveva una media di 466. La media dell'OCSE nel 2009 è stata di 498. Considerando questo dato sulla scala di literacy matematica il punteggio medio degli studenti italiani ricade all'interno del Livello 3 mentre nel 2006 e nel 2003 corrispondeva al Livello 2. Ciò nonostante l'Italia continua a ottenere risultati nettamente al di sotto della media OCSE, e l'*emergenza matematica* (Anzellotti, 2008) è tutt'altro che risolta. Gli studenti italiani risultano mediamente molto meno preparati dei loro coetanei di fronte a test improntati al *problem solving* e alla "matematizzazione" di problemi decisionali descritti

[5] http://optimierung.mathematik.unikl.de/mamaeusch
[6] http://www.learnaboutor.co.uk

in linguaggio naturale.
L'introduzione dei concetti fondamentali di R.O., che può avvenire già a partire dalla Scuola Primaria, è finalizzata proprio a dare agli studenti la *forma mentis* e le competenze richieste nei quesiti tipo OCSE/PISA, oltre che a introdurre in maniera diversa lo studio di argomenti che già ora fanno parte delle indicazioni curricolari di matematica, ma che risultano scollegati tra di loro e non adeguatamente motivati (Schettino 2011). L'acquisizione dell'abilità di modeling è un processo che deve accompagnare lo studente in tutto il percorso scolastico, dalla Scuola Primaria alla Secondaria di Secondo Grado, ed è strettamente connesso allo sviluppo delle capacità linguistico-espressive. Il modeling consiste essenzialmente nella *traduzione di un problema posto in linguaggio naturale in un modello algebrico che permetta di risolverlo attraverso algoritmi di calcolo* (Schettino, 2008). Per effettuare una qualunque "buona traduzione" tra lingue diverse è necessario:

1. conoscere la grammatica del *linguaggio di partenza*, nel nostro caso l'italiano;
2. conoscere la grammatica del *linguaggio di arrivo*. Nel nostro caso:
   a) sapere che cos'è un'*incognita*;
   b) sapere che cos'è un *dato* (esplicito o interconnesso a vincoli);
   c) sapere che oggetto è, e cosa può rappresentare, un *vincolo*, sia esso espresso in forma di uguaglianza o disuguaglianza.

Per produrre un modello, però, non si può esulare da un terzo elemento fondamentale (non strettamente necessario nel caso di semplice traduzione da una lingua a un'altra):

3. *comprendere* chiaramente il problema posto e l'*obiettivo* da perseguire per risolverlo.

Se il testo di un problema non viene *compreso* non è possibile effettuarne la traduzione in un modello algebrico. La comprensione riguarda la sfera del corretto ragionare, l'abitudine all'attenzione, e la *literacy* in lettura.
Un problema può essere tradotto in più di un modello, per ognuno dei quali è possibile effettuare la codifica in un foglio elettronico e risolverlo autonomamente con un solutore, oppure utilizzare, con le modifiche imposte dallo specifico caso, uno degli algoritmi "standard" esistenti per

quella *classe* di modelli, o ancora costruire un algoritmo risolutivo. Fa parte dell'abilità di modeling l'individuazione della classe di modelli più appropriata per quel particolare esempio di problema.

Quanto appena esposto trascende considerazioni inerenti l'ordine di scuola e l'età degli studenti. Certamente, se si propongono percorsi verticali di R.O. si rende necessario individuare contenuti specifici (metodi di ottimizzazione, teoria dei grafi, simulazione,…), ma l'enfasi è comunque da porre sullo sviluppo dell'abilità di modeling piuttosto che sugli algoritmi risolutivi.

Giovanni Righini, professore associato di Ricerca Operativa presso l'Università degli Studi di Milano, molto attivo nell'ambito dell'insegnamento della R.O. nella scuola secondaria di secondo grado, afferma (Righini, 2010) che i test OCSE/PISA non richiedono la conoscenza di "distribuzioni doppie condizionate e marginali" (elencate tra gli obiettivi specifici di apprendimento del secondo biennio dei Licei) né delle "distribuzioni binomiale, normale e di Poisson" (elencate tra gli obiettivi specifici di apprendimento del quinto anno) e tanto meno di "funzione calcolabile e calcolabilità" (elencate tra gli obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio!) o di risoluzione di equazioni differenziali (spostate dalla formazione universitaria al quinto anno di Liceo). Richiedono invece un minimo di dimestichezza con strumenti di base di modellizzazione matematica come i grafi (non menzionati nelle "Indicazioni") e soprattutto un'attitudine al *problem solving* con metodo scientifico, per formare la quale la R.O. svolge un ruolo educativo unico, indispensabile e insostituibile, in particolare per lo sviluppo della capacità di astrazione.

Per chiarire il tipo di approccio alla R.O. che potrebbe essere sviluppato in una seconda superiore, di consideri il seguente problema (Facchinei, Lucidi, Roma, 2006)[7]:

Problema P

Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di

---

[7] F. Facchinei, S. Lucidi, M. Roma, *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, Università di Roma "La Sapienza", a.a 2005-2006, http://www.dis.uniroma1.it/~or/main.pdf.

frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di 0.2 € e 0.35 € ogni ettogrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 75 g di zucchero, mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 50 g di zucchero e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 g di zucchero.
Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.

Si tratta di un problema di P.L., nella fattispecie di un *modello di miscelazione*, in due variabili, che può essere formulato (in centesimi di euro) come segue:

$$\begin{cases} \min 20x_1 + 35x_2 \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}, \qquad [P]$$

dove x_1 e x_2 rappresentano rispettivamente le quantità espresse in ettogrammi di polpa di frutta e di dolcificante che devono essere utilizzate per produrre un ettogrammo di succo.
Dopo aver adeguatamente lavorato alla fase di modeling, è possibile affrontare il problema graficamente, nel piano cartesiano. Grazie all'interpretazione geometrica delle disequazioni lineari, l'insieme dei vincoli viene tradotto nel poliedro convesso corrispondente[8]. Introducen-

[8] in questo particolare caso la regione ammissibile è non limitata, ma il fatto che la funzione obiettivo sia inferiormente limitata garantisce l'esistenza di una soluzione ottima globale.

do intuitivamente il concetto di *gradiente* di una funzione come “direzione di crescita”, e utilizzando le rette di livello, è immediato far osservare che la soluzione ottima giace su un vertice della regione ammissibile, in questo caso nel punto (1,1); occorrono pertanto un ettogrammo di polpa di frutta e un ettogrammo di dolcificante per produrre, al costo (minimo) di 55 centesimi, un ettogrammo di succo di frutta rispettando i vincoli imposti dalla produzione. Per “offrirne” agli studenti la conferma si può far ricorso ad un qualunque solutore gratuito, quale il *Solver* di Excel (cfr. par. 4), o a *Wolfram Alpha*[9] (il “motore computazionale della conoscenza”) al quale basta fornire il semplice comando “minimize 20x+35y on (140x>=70 and 20x+10y>=30 and 50x+100y>=150 and x>=0 and y>=0)” per ottenere la soluzione ottima e il grafico della regione ammissibile.
Si consideri ora un secondo problema:

Problema D

Un’industria farmaceutica vende compresse di nutrimenti puri, cioè compresse di vitamina C, di sali minerali e di zucchero, e vuole immettere queste compresse su un ipotetico mercato come offerta sostitutiva al succo di frutta per l’acquisizione di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. Naturalmente questa industria farmaceutica vuole massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle compresse, ma al tempo stesso deve dare un prezzo alle compresse tale da essere competitiva.

Siano allora u_1, u_2 e u_3 i prezzi di vendita rispettivamente di 1 mg di vitamina C, di 1 mg di sali minerali e di 1 grammo di zucchero; supponendo che la vendita di questi nutrimenti puri sia pari ai fabbisogni minimi (cioè a 70 mg di vitamina C, a 30 mg di sali minerali e a 75 g di zucchero), l’espressione del profitto dell’industria farmaceutica che dovrà essere massimizzata è:

$$70u_1 + 30u_2 + 75u_3$$

Affinché i prezzi di vendita dei componenti puri in compresse fissati

[9] http://www.wolframalpha.com/

dall'industria siano concorrenziali, si deve imporre che il costo unitario dei nutrimenti puri sia minore o uguale al prezzo che si dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente attraverso gli ingredienti del succo di frutta, cioè dalla polpa di frutta e dal dolcificante. Quindi il problema complessivo formulato dall'indu-stria farmaceutica è:

$$\begin{cases} \max 70u_1 + 30u_2 + 75u_3 \\ 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 \leq 20 \\ 10u_2 + 50u_3 \leq 35 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases} . \qquad [D]$$

Il problema D rappresenta il ***duale*** del problema P; ricorrendo ad un solutore[10] (in questo esempio la risoluzione grafica risulta improponibile, trattandosi di un problema in tre incognite) si ottiene che la soluzione ottima è $u_1 = 0$ (ossia conviene non vendere compresse di vitamina C), $u_2 \approx 0.17$, $u_3 \approx 0.7$, e si "scopre" che, all'ottimo, il valore della funzione obiettivo (55 centesimi di euro) coincide esattamente con il valore ottimo della funzione obiettivo di P. Esula dal contesto di questo lavoro l'approfondimento delle implicazioni economiche della teoria della dualità, ma risulta immediato, a partire da un esempio tipo quello proposto, introdurre e sviluppare il concetto di equilibrio economico.
Si può facilmente far notare che la formulazione di D può essere ottenuta a partire da quella di P (e viceversa) effettuando le seguenti operazioni:

- D ha tante incognite quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le incognite di P;
- la colonna dei termini noti di P diventa la riga dei coefficienti di costo della funzione obiettivo in D, e i coefficienti di costo della funzione obiettivo di P diventano i termini

[10] o semplicemente fornendo a *WolframAlpha* il comando "maximize 70x+30y+75z on (140x+20y+25z<=20 and 10y+50z<=35 and x>=0 and y>=0 and z>=0) "

noti di *D*;

- la tabella (matrice) dei vincoli in *D* è la trasposta della tabella dei vincoli di *P* (senza considerare i vincoli di non negatività).

Semplici esempi analogamente fruibili di problemi di P.L., e i corrispondenti problemi duali, possono essere ricercati tra i *problemi di trasporto* e i *problemi di allocazione ottima di risorse*.
L'approccio alla P.L. in seconda superiore può essere sistematizzato e approfondito nel triennio superiore, contestualmente all'introduzione dell'algebra lineare, della geometria analitica, dell'analisi matematica.

3. L'esperienza delle gare AIRO individuali

Nell'anno scolastico 2008/2009 ha avuto luogo la prima edizione della Gara AIRO individuale per studenti delle scuole secondarie di secondo grado, una nuova tipologia di giochi matematici, patrocinati dal MIUR, organizzati dall'Associazione Italiana di Ricerca Operativa (AIRO). La gara, che si articola in una fase *locale* e una fase *nazionale*, si svolge interamente on-line; nella fase locale gli studenti hanno a disposizione un tempo "lungo" (dai due mesi dell'edizione 2009 ai sette dell'edizione del 2011, attualmente in corso) per trovare una soluzione ai quesiti proposti sul sito, che possono essere risolti con qualsiasi metodo, purché documentato: con carta e penna, a mente, con solutori software, con algoritmi appositamente realizzati. Una peculiarità dei giochi consiste nel meccanismo di correzione "iterativa": quando si spedisce via e-mail la soluzione, anche parziale, di un problema, si ottengono un punteggio e un commento del *referente locale* in base al quale è possibile eventualmente correggere o perfezionare la soluzione e aumentare il proprio punteggio.
Insegno Matematica presso l'I.T. Nautico "A. Doria", sezione annessa al Polo Tecnologico Imperiese. Alla prima edizione dei giochi, nel 2009, hanno partecipato, unici in Liguria, tre studenti del nostro istituto, Matteo e Lorenzo di seconda e Chiara di quinta, che, in precedenza, non avevano ricevuto alcun tipo

d'informazione, né tanto meno di formazione, sulla R.O.. Per chiarezza espositiva riporto il testo di due quesiti; i testi e le soluzioni di tutti i problemi sono consultabili sul sito della gara[11].

Esercizio 1: Video su CD

Video	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MB	144	172	153	131	126	109	165	149	108	84
Video	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
MB	199	160	182	129	107	161	130	167	128	94

Volete copiare alcuni video dall'*hard disk* del vostro computer su CD di capacità pari a 700 Megabyte. I video hanno dimensioni diverse, a seconda della loro durata, come riportato in tabella.
Domanda 1 [1][12]: Quanti video potete scrivere su uno stesso CD, al massimo?
Domanda 2 [5]: Quali?
Domanda 3 [10]: Qual è il minimo numero di CD necessari per fare una copia di tutti i video?
Domanda 4 [5]: Come vanno abbinati i video ai CD?

Esercizio 6: Quanti camerieri?

Il gestore di un ristorante-pizzeria ha osservato che il numero di clienti varia a seconda del giorno della settimana in modo piuttosto regolare e prevedibile. Dal numero di clienti dipende il minimo numero di camerieri necessari per garantire un servizio ai tavoli sufficientemente rapido. Il minimo numero di camerieri richiesto per ogni giorno della settimana è riportato nella tabella qui sotto.

Giorno	LUN	MAR	MER	GIO	VEN	SAB	DOM
N. camerieri richiesti	4	5	5	10	12	12	2

I turni di lavoro dei camerieri possono iniziare in qualunque giorno e durano quattro giorni consecutivi. Così un cameriere che inizia il turno di giovedì lavora giovedì, venerdì, sabato e domenica, mentre un cameriere che inizia il turno di sabato lavora sabato, domenica, lunedì e martedì, e così via. Il gestore del ristorante ha un amico che studia ricerca operativa e gli offre una cena in cambio della risposta a queste domande.
Domanda 1 [10]: Qual è il minimo numero di camerieri necessario per soddisfare il fabbisogno e in quali giorni devono iniziare i loro turni?
Domanda 2 [2]: Quale sarebbe invece la soluzione se i camerieri lavorassero cinque giorni consecutivi, anziché quattro?

---

[11] http://www.dti.unimi.it/righini/GareAIRO/Gare3/Index.htm

[12] Tra parentesi quadrate sono indicati i punteggi associati alle singole domande

Domanda 3 [5]: Se i camerieri possono essere pagati 80 Euro/giorno per lavorare quattro giorni consecutivi oppure 75 Euro/giorno per lavorare cinque giorni consecutivi, qual è la soluzione di costo minimo?

Nel primo periodo della fase locale gli studenti hanno lavorato ai problemi autonomamente, ricercando, a volte con successo, le soluzioni con metodi "ingenui", sostanzialmente per tentativi. Pur sostenendoli, non ho fornito loro particolari indicazioni, preferendo che prendessero piena coscienza di quanto possa essere complicato risolvere manualmente problemi "reali", seppur di modeste dimensioni. Sebbene la tempistica della gara non fosse tale da consentire un intervento formativo vero e proprio, ho affrontato con Chiara, Lorenzo e Matteo i concetti di modello, di variabili decisionali, vincoli e funzione obiettivo; ho introdotto la Programmazione Lineare (P.L.) e la Programmazione Lineare Intera (P.L.I.), i problemi di assegnamento e i problemi di max-min. I tempi dedicati a queste attività sono stati estremamente limitati e, pertanto, i contenuti soltanto accennati. Tutti gli studenti in graduatoria locale sono stati ammessi alla fase nazionale. A cavallo tra le due fasi ho organizzato un incontro tra i nostri ragazzi e la referente locale dei giochi, la dottoressa Elena Tanfani, ricercatrice presso il Dipartimento di Economia e Metodi Quantitativi dell'Università di Genova. La dottoressa Tanfani ha illustrato la risoluzione di ognuno dei problemi della fase locale: partendo dalle variabili decisionali, dal modello, e dalla sua classe di appartenenza, ha introdotto anche il software utilizzato per la risoluzione. Dati i tempi ristretti, ha fatto riferimento solo al *Solver* di Excel (sul sito dei giochi è inserita una guida all'uso) e a *Classic Lindo*, scaricabile gratuitamente dalla rete. La fase nazionale si è svolta in modalità on-line, presso sedi locali. Il meccanismo della prova finale è analogo a quello della fase locale: man mano che gli studenti risolvono, anche solo parzialmente, uno o più tra i problemi proposti, inviano le proprie soluzioni (sulla piattaforma DOCEBO dell'Università di Milano) e, iterativamente, vengono loro fornite indicazioni in tempo reale su come migliorare il punteggio conseguito. I quesiti e le rispettive soluzioni sono reperibili sul sito della gara.

All'edizione 2009/2010[13] Matteo ha partecipato autonomamente, lavorandovi saltuariamente e senza investire troppe risorse.
Nell'anno scolastico appena concluso la fase locale della gara[14] ha avuto inizio il 27 settembre con la pubblicazione dei problemi ed è terminata il 9 aprile. In collaborazione con la dottoressa Tanfani ho redatto un progetto d'istituto dedicato ai Giochi AIRO 2010/2011, aperto a tutto il triennio superiore dell'I.T. Nautico. Gli obiettivi erano: familiarizzare gli studenti con la R.O., favorire la partecipazione ai giochi, far conoscere gli strumenti informatici risolutivi di alcuni modelli matematici, quali il *solver* di EXCEL e *Classic Lindo*. L'articolazione del progetto ha previsto quattro incontri pomeridiani (extra-curriculari) di due ore ciascuno, condotti in copresenza con la dottoressa Tanfani, dedicati a una panoramica dei modelli di ottimizzazione e all'introduzione degli strumenti informatici di supporto, e uno alla mia sola presenza (sempre di due ore extra-curriculari) a cavallo tra la fase locale e quella finale, per la correzione collettiva dei problemi della fase locale.
Gli studenti avevano la necessità di recuperare, nel corso dell'anno, 30 ore in attività extra-curriculari, a causa della scelta dell'Istituto di adottare un orario ridotto (unità orarie di 50 m). Il progetto dei Giochi AIRO si è inserito tra le iniziative, ad adesione libera, offerte agli studenti a tal fine.
A novembre ho presentato il progetto nelle singole classi del triennio, invitando gli studenti a visitare il sito dei giochi. Sui 110 studenti del triennio 25 (di terza e quarta) hanno visitato il sito, letto i testi dei quesiti, e partecipato al primo incontro con la dott.ssa Tanfani. Il problema che, in questa edizione, ha incuriosito gli studenti e stimolato la partecipazione, è una manipolazione (permutazioni di righe, colonne, blocchi e cifre) del Sudoku elaborato da Arto Inkala nel 2006, noto come il "Sudoku più difficile del mondo" (Ritmeester, 2006). Nei successivi tre incontri il numero di partecipanti si è attestato intorno ai 16 studenti, sette dei quali hanno inviato soluzioni ad alcuni problemi e sono stati inseriti nella classifica

[13] http://www.dti.unimi.it/righini/GareAIRO/Gare4/Index.htm
[14] http://www.dti.unimi.it/righini/GareAIRO/Gare5/Index.htm

della fase locale.
Al fine di rendere più agevole la risoluzione di alcuni quesiti attraverso il ricorso a software di Programmazione Matematica più potenti e avanzati, rispetto al Solver di Excel o alla versione *demo* di Lindo, la dottoressa Tanfani ha tentato con successo la procedura di accreditamento presso l'MPL Academic Program[15], un programma internazionale che mette gratuitamente a disposizione del personale docente e degli studenti delle università prodotti software e servizi di formazione sul sistema di modeling MPL, di Maximal Software, leader mondiale nel software di sviluppo e formulazione di modelli nell'ambito dell'ottimizzazione. Maximal Software ha pertanto fornito la licenza per installare la versione *full* di MPL su tutti i computer del laboratorio e sui computer personali degli studenti. Uno degli incontri con la dottoressa Tanfani è stato dedicato all'utilizzo di MPL.
Alla fase nazionale hanno partecipato dieci studenti: due della quinta Liceo Scientifico "N. Copernico" di Brescia, uno della quinta I.T.I.S Informatico di Castellanza (Varese), e i sette dell'I.T. Nautico di Imperia (di terza e quarta)[16].
A conclusione di questo breve report sulle mie esperienze con le gare AIRO e il relativo progetto, mi preme sottolinearne in generale gli aspetti più significativi e le ricadute più evidenti. I partecipanti non vengono selezionati in base ad un criterio (discriminatorio) di presunta eccellenza, ma vengono invitati a partecipare liberamente, spinti da semplice curiosità e desiderio di autosfida. Essi sperimentano che risolvere problemi decisionali concreti, contestualizzati, significa tradurli correttamente in linguaggio algebrico e non necessariamente arrivare personalmente alla soluzione, perché "c'è qualcos'altro che la trova" (il software); scoprono una matematica "nuova" e, a prescindere dalla prestazione fornita nella gara, ne restano affascinati; sono consapevoli e orgogliosi di conseguire

[15] MPL Academic Program: http://www.maximalsoftware.com/academic/
[16] La classifica finale è consultabile all'indirizzo:
http://www.dti.unimi.it/righini/GareAIRO/Gare5/Classificafinale.htm

risultati impegnandosi autonomamente; partecipano agli incontri con entusiasmo e spirito collaborativo, acquisendo conoscenze che solitamente sono riservate a studenti del secondo o terzo anno di università.

Indipendentemente dall'evoluzione futura del progetto Giochi AIRO 2011, ritengo un successo formativo di rilievo l'essere riuscita a coinvolgere e interessare un nucleo consistente di studenti in un'iniziativa strutturata sulla libera partecipazione ad attività aggiuntive di matematica. Il progetto è sicuramente riproponibile nel prossimo anno scolastico; potrà essere migliorato alla luce dell'esperienza complessiva di quest'anno e aperto a studenti di altri istituti del territorio.

4. Conclusioni

La R.O. è uno strumento didattico formidabile per la sua versatilità e multidisciplinarità. Adottare il punto di vista della R.O. per introdurre lo studio dei nuclei tematici della matematica consentirebbe di intervenire efficacemente sulle carenze, in termini di modeling e risoluzione dei problemi, dei nostri studenti, così ben evidenziate nelle indagini internazionali. D'altro canto, l'esperienza con i giochi AIRO ha mostrato quanto un avvicinamento alla R.O. sia gradita agli studenti, anche in "tenera età" e di fronte a stimoli complessi.

Un'attenzione particolare merita la stretta relazione intercorrente tra la R.O. e l'informatica. Nella riforma Gelmini gli *Elementi di informatica* costituiscono il quinto tema degli obiettivi specifici di apprendimento di Matematica relativi al primo biennio dei Licei: "*Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione*". La matematica può aiutare gli studenti a tradurre problemi in *modelli*, in modo tale che la risoluzione sia lasciata a strumenti di calcolo automatico. L'informatica, intesa come la classica *Computer Science* (e non come *Information and Communication Tecnology*, ICT), consente di progettare e tradurre in programmi gli *algoritmi* che servono a risolvere i problemi. In tale ambito la R.O. si colloca "fisiologica-

mente" come materia *trait d'union* tra la matematica e l'informatica e può fornire motivazioni consistenti a entrambe le discipline, grazie alla possibilità di contestualizzarne l'insegnamento a *case studies* riguardanti esempi di problemi reali, anche complessi. Negli Istituti di Secondo Grado a vocazione informatica "forte" è possibile lavorare alla realizzazione di algoritmi di ottimizzazione e simulazione utilizzando solo nozioni di base di programmazione. In quelli a vocazione "debole" è possibile formare gli studenti all'uso di solutori di problemi di ottimizzazione di differente livello di complessità. Il più semplice, per chi abbia familiarità con il foglio elettronico, è il *Solver* di Microsoft Excel, che consente la soluzione di problemi di P.L., P.L.I., e programmazione non-lineare (P.N.L.). Le stesse classi di problemi possono essere affrontate utilizzando Lindo[17] la cui versione *demo* è limitata a esempi con al massimo 30 variabili intere/binarie. Un solutore gratuito e molto usato per problemi lineari, sia nel continuo che nel discreto è GLPK[18]. Nel pacchetto di installazione di GLPK è documentato anche MathProg, il linguaggio che serve per descrivere il modello matematico da dare in ingresso a GLPK. Tutto ciò che serve per scrivere il modello nel linguaggio MathProg è un editor di files di testo, come il Notepad di Windows. Altri solutori gratuiti di modelli di P.L. e P.L.I. sono reperibili sul sito Computational Infrastructure for Operations Research (COIN-OR[19]). Un nutrito elenco di solutori gratuiti per problemi di P.N.L. è consultabile alla pagina Global Optimization di Arnold Neumaier[20]. Diversi altri solutori per problemi di ottimizzazione su grafo sono disponibili sul sito Operation Research Models and Methods (ORMM[21]).
Le diverse fasi dello studio delle classi di problemi decisionali ben si prestano a una metodologia didattica di tipo *laboratoriale* (Appa-

[17] http://www.lindo.com
[18] http://gnuwin32.sourceforge.net/packages/glpk.htm
[19] http://www.coin-or.org/
[20] http://www.mat.univie.ac.at/~neum/glopt.html
[21] http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/

ri 2008-2009). Nella fase di modeling, il “laboratorio” può essere semplicemente l’aula della classe; si propone un problema e, dopo una breve pausa di elaborazione individuale, si suddividono gli studenti in piccoli gruppi di lavoro, orientando l’attività alla traduzione del problema in un modello. L’insegnante funge da tutor, coordinando, intervenendo, focalizzando sui nodi concettuali e fornendo, in forma frontale-cooperativa, gli strumenti di modeling più opportuni per il caso (per esempio i grafi). Nella fase di *risoluzione* del modello il “laboratorio” diviene l’aula informatica, ove gli studenti utilizzano un solutore (Schettino, 2011).

La crescita della R.O. che si osserva in tutto il mondo non è dovuta a fattori contingenti, bensì a cause globali che assicurano una stabilità di questa crescita anche nel lungo periodo (la globalizzazione dei mercati e dell’economia, l’urgenza di un radicale cambio di logica gestionale nelle pubbliche amministrazioni, la necessità di strumenti decisionali scientifici per far fronte all’emergenza ambientale ed energetica, lo spostamento dell'economia occidentale dalla produzione ai servizi). Corsi e percorsi universitari di specializzazione in R.O. si trovano in moltissimi corsi di studio afferenti alle facoltà di Matematica, Informatica, Ingegneria, Economia. La R.O. offre oggi la possibilità di seguire percorsi di studio universitario dedicati e orientati a una figura professionale nuova, con possibilità di lavoro sia dipendente che autonomo e con aperture tanto verso le applicazioni quanto verso la ricerca scientifica.

Concludo citando Morris Kline e Giorgio Gallo: “la matematica è primariamente un'attività creativa, e questo richiede immaginazione, intuizione geometrica, sperimentazione, congetture giudiziose, tentativi ed errori, l'uso di analogie del tipo più vago, sbagliare e annaspare. Anche quando il matematico è convinto della correttezza di un risultato, egli deve comunque creare per trovarne la prova” (Kline, 1970). “Tutto ciò richiede necessariamente capacità di vedere la realtà in modi nuovi, di cambiare prospettiva, di uscire da vecchi paradigmi per accoglierne o inventarne nuovi” (Gallo, 2010).

BIBLIOGRAFIA

P. Appari, *La didattica laboratoriale per imparare la complessità della società odierna*, in L'Educatore n. 11 p. 19-21, Fabbri, Milano, 2008-2009.

G. Anzellotti, *La questione 'matematica' nella scuola italiana*, Rivista dell'Istruzione, v. 24, n. 5, p. 77-84, 2008.

I. Ayres, *Super Crunchers: Why Thinking-by-Numbers is the New Way to Be Smart*, Bantam Dell, New York, 2007.

S. Baker, *Math Will Rock Your World*, Business Week, 23 gennaio 2006.

S. Baker, *The Numerati*, Houghton Mifflin Company, New York, 2008.

A. Balderrama, 10 *Jobs That Pay More Than $30 an Hour*, 7 luglio 2010, http://www.careerbuilder.com.

Before It's Too Late: A Report to the Nation from the National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st century, U.S. Department of Education, 2008, http://www2.ed.gov/inits/Math/glenn/report.pdf.

K. Chelst, T. Edwards, R. Young, K. Keene, D. Royster, *Can You Imagine ...500,000 Prep Proponents of O.R.?*, OR/MS Today, Agosto 2008.

K.R. Chelst, T.G. Edwards, *Does this line ever move?*, Key Curriculum Press, Emeryville, 2005.

M. Daskin, *How We Can Avert A National Crisis*, OR/MS Today, Aprile 2006.

T.H. Davenport, J.G. Harris, *Competing on Analytics: the New Science of Winning*, Harvard Business School Press, Boston, Massachussets, 2007.

G. Gallo, *Costruzione della Pace: quale ruolo per la matematica?*, rielaborazione di una conferenza tenuta il 30 novembre 2009 presso l'Università di Camerino, Pisa, 15 aprile 2010.

M. Kline, *Logic versus Pedagogy*, American Mathematical Monthly, 77, p. 264-282,1970.

T. May, *The New Know: Innovation Powered by Analytics*, Wiley and SAS Business Series, Hoboken, New York, 2009.

V. Mehrotra, *Most Important Thing Our Profession Can Do*, OR/MS Today, Febbraio 2006.

G. Righini, *La Ricerca operativa e la riforma della scuola superiore*, 2010, http://www.dti.unimi.it/righini/scuola/Osservazioni.pdf

P. Ritmeester, *Mathematician claims to have penned hardest Sudoku*, USA Today, 6 novembre 2006,
http://www.usatoday.com/news/offbeat/2006-11-06_sudoku_x.htm

A. Schettino, *Diario di bordo m@t.abel - Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale a quello dell'algebra*, 2008,
http://www.albertaschettino.altervista.org/Formazione/DiarioDiBordo/diario_bordo-Alberta.doc.

A. Schettino, "*La Ricerca Operativa: una strategia didattica multifunzione per la scuola superiore*", tesi di master di I livello in Metodologie didattiche per l'insegnamento della matematica, Università Telematica delle Scienze Umane "Niccolò Cusano", 2011.