1 Due varianti del Weber problem

Problema RM (Raw Materials).

Sono dati due insiemi di punti, origini e destinazioni, ciascuno con dei pesi. Bisogna localizzare una singola facility minimizzando la somma delle distanze da alcuni di essi. Tutte le distanze dalle destinazioni contribuiscono al costo totale e sono pesate con i pesi dati. Le distanze dalle origini devono essere pesate (anche con peso nullo, eventualmente) in modo tale che i loro pesi raggiungano una data soglia e non superino una data soglia (che può essere diversa per ogni origine).

Date le origini da utilizzare e i loro pesi, il minimo è unico (problema convesso). Il problema RM non è convesso, perché ci sono tanti modi di scegliere le origini. Il loro peso è sempre pari al massimo possibile per tutte quelle scelte tranne una, cioè la più lontana da quelle scelte, il cui peso è il complemento a 1 della somma dei pesi delle altre origini scelte.

L'idea quindi è di enumerare in modo efficiente i possibili sottoinsiemi di origini, risolvere per ciascuno un problema di PNL convesso e infine scegliere la migliore tra tutte le soluzioni trovate.

Anche se il numero di sottinsiemi di un insieme è un numero combinatorio, basta enumerare un numero polinomiale di sottinsiemi. Basta infatti enumerare le regioni del piano che vedono lo stesso insieme di origini più vicine (variante interessante dei diagrammi di Voronoi).

Per ogni regione, l'ottimo si calcola con l'algoritmo di Weiszfeld-Ostresh, che è il classico algoritmo iterativo che converge al minimo con precisione desiderata.

Le regioni del diagramma di Voronoi sono poliedri.

Idea per un algoritmo che enumera tutti i minimi locali: - enumerare tutti i punti di intersezione del diagramma di Voronoi (per ogni coppia di origini A e B, calcolare l'asse del segmento AB e intersecarlo con tutti gli altri assi). - enumerare per ogni punto di intersezione le regioni di Voronoi che hanno un vertice in quel punto. Ogni regione corrisponde ad un ordinamento delle origini. - per ogni punto di intersezione ed ogni regione adiacente, valutare la direzione del vettore gradiente della corrispondente funzione obiettivo. Se il vettore opposto al gradiente punta all'interno della regione, la regione può essere scartata. Altrimenti, eseguire Weiszfeld-Ostresh e verificare se la soluzione ottima cade dentro o fuori dalla regione. Se una regione ha tutti i vertici tali che il gradiente punta all'interno, allora contiene sicuramente un ottimo locale. - Dopo aver trovato tutti i minimi locali (che sono in numero polinomiale), si sceglie il migliore.

Bisogna rendere efficiente la ricerca con un criterio euristico che tenda ad esplorare per prime le regioni più promettenti e con un bound che permetta di escludere rapidamente minimi locali non migliori del migliore già trovato. Inoltre alcune regioni si possono fondere con altre, perché basta che abbiano in comune l'ordinamento delle origini più vicine, fino a totalizzare almeno 1 con la somma dei loro pesi.

Bisogna progettare una struttura-dati ben fatta che renda efficiennti le operazioni sul grafo di Voronoi che è un grafo planare.

Problema LPC (Limited Production Capacity).

E' dato un solo insieme di punti (destinazioni) con pesi (domanda). Si deve localizzare una facility con capacità in modo da minimizzare la somma delle distanze pesate dai punti dati. I pesi delle distanze sono le quantità trasportate tra la facility e i punti e sono comprese tra 0 e la domanda, per ogni punto dato; la loro somma deve essere pari alla capacità della facility. Tutti i pesi si possono quindi normalizzare tra 0 e 1, dividendo per la capacità della facility.

Anche in questo caso la soluzione si può trovare enumerando le regioni di Voronoi che vedono lo stesso insieme di facility più vicine o per lo meno lo stesso sottinsieme di facility più vicine finché la somma dei loro pesi arriva a 1 (le facilities restanti possono anche comparire in ordine diverso).

Per ogni sottinsieme scelto, la facility più lontana (l'unica il cui peso può essere inferiore alla domanda data e normalizzata) è certamente in un vertice del guscio convesso del sottinsieme scelto.

Gran parte del lavoro svolto per il problema RM dovrebbe restare valido per il problema LPC (costruzione del diagramma di Voronoi, selezione delle regioni, ricerca dei minimi locali con l'algoritmo iterativo, struttura-dati per rappresentare il grafo planare...).

V. Church et al. (2022) per la descrizione dei due problemi. Il paper mostra che i problemi non sono convessi e descrive solo banali algoritmi di enumerazione.

Lavoro adatto a tesi triennale.