**Esercizio 2: Piscina nel parco**

 Le variabili del problema sono le coordinate dei vertici del rettangolo oppure i coefficienti delle rette che contengono i lati. Seguendo la seconda ipotesi, che risulta leggermente più semplice, siano *ai*, *bi* e *ci* i tre coefficienti della retta *i=1..4*. Affinché essi rappresentino effettivamente una retta è necessario imporre la condizione di normalizzazione

$$a\_{i}^{2}+b\_{i}^{2}=1 ∀i=1…4$$

 Dette *xi* e *yi* le coordinate del vertice *i*-esimo, si può imporre il passaggio delle rette per i vertici con le otto equazioni:

$$a\_{i}x\_{i}+b\_{i}y\_{i}+c\_{i}=0 ∀i=1…4$$

$$a\_{i}x\_{i+1}+b\_{i}y\_{i+1}+c\_{i}=0 ∀i=1…4$$

dove gli indici vanno letti modulo 4.

 Per imporre che il quadrilatero sia un rettangolo, basta imporre la condizione di perpendicolarità tra le rette con indici consecutivi (bastano 3 delle 4 condizioni):

$$a\_{i}a\_{i+1}=-b\_{i}b\_{i+1} ∀i=1…3$$

 Le lunghezze dei lati, dette *L1* e *L2*, sono date da

$$L1=\sqrt{\left(x\_{1}-x\_{2}\right)^{2}+\left(y\_{1}-y\_{2}\right)^{2}}$$

$$L2=\sqrt{\left(x\_{2}-x\_{3}\right)^{2}+\left(y\_{2}-y\_{3}\right)^{2}}$$

e l’area da massimizzare è quindi *A = L1\*L2*.

 Le proporzioni tra le lunghezze sono imposte dai vincoli

$$L1\geq 0.4 L2$$

$$L2\geq 0.4 L1$$

 Bisogna anche imporre che le coordinate dei vertici siano all’interno del parco:

$$0\leq x\_{i}\leq 100 ∀i=1…4$$

$$0\leq y\_{i}\leq 100 ∀i=1…4$$

 Infine, occorre imporre che gli alberi in posizione data non cadano all’interno del rettangolo. Indicando con *x’* e *y’* le loro coordinate e utilizzando l’indice *j=1…8* per indicare gli alberi, si può imporre che le equazioni delle rette dei lati siano soddisfatte come disuguaglianze a meno che il vincolo sia reso ridondante da un termine che dipende da una variabile binaria *zij*, come si usa fare in presenza di vincoli disgiuntivi. Bisogna infatti imporre che ogni albero cada dalla parte esterna di almeno uno dei quattro lati della piscina.

 Si ha quindi:

$$a\_{i}x'\_{j}+b\_{i}y'\_{j}+c\_{i}\geq -Mz\_{ij} ∀i=1..4, j=1..8$$

e

$$\sum\_{i=1}^{4}z\_{ij}\leq 3 ∀j=1…8.$$

 Perché i lati siano orientati nella direzione giusta, si può imporre che i vertici del rettangolo soddisfino le stesse disuguaglianze con il segno opposto, cioè siano verso l’interno della piscina rispetto a ciascun lato.

$$a\_{i}x\_{k}+b\_{i}y\_{k}+c\_{i}\leq 0 ∀i,k=1..4$$

 Il modello risultante è di PNL e non è convesso.