

# Piccola guida pratica alla risoluzione degli esercizi d'esame di ricerca operativa (versione preliminare)

Matteo Salani, Giovanni Righini

25 Settembre 2003

Questo documento è stato scritto principalmente per gli studenti che per motivi di lavoro o per altri motivi non possono frequentare le esercitazioni in laboratorio, che sono parte integrante del corso di Ricerca Operativa, e che quindi incontrano gravi difficoltà nella preparazione alla prova d'esame. Esso quindi completa la raccolta degli esercizi d'esame che è già disponibile agli studenti e spiega come usare la stessa in modo efficace.

## 1 Il problema

Negli esercizi della prova d'esame di ricerca operativa i problemi sono presentati in modo informale e corredati da alcuni dati numerici. L'intento è quello di simulare la situazione in cui opera un ricercatore operativo cui viene presentato un problema di ottimizzazione.

La prova d'esame consiste nel formulare il problema in termini matematici, classificarlo e risolverlo con i dati forniti nel testo, utilizzando il programma opportuno, cioè Lindo o Lingo. Spesso l'esercizio è anche corredato da alcune domande per rispondere alle quali è necessario analizzare il file di output di Lindo/Lingo. Di solito la fase pi critica è la prima, cioè quella della definizione del modello matematico.

*La modellizzazione non può essere eseguita seguendo regole fisse, sempre uguali.* Essa richiede invece la capacità di usare alcuni *strumenti* per costruire il modello corretto. Da ciò consegue l'importanza di acquisire una certa dimestichezza con gli esercizi di modellizzazione, prima di affrontare la prova d'esame. Per affinare l'intuito e l'esperienza che consentono di risolvere questo tipo di esercizi, è più opportuno risolvere un numero ristretto di

esercizi comprendendoli a fondo, piuttosto che risolverne molti ma in modo più superficiale.

Dietro la forma in cui vengono di volta in volta posti i problemi si celano sempre i tipi di modelli presentati a lezione. Tipicamente si hanno modelli di:

- programmazione lineare,
- programmazione lineare intera,
- programmazione non lineare.

Gli esercizi d'esame degli appelli a partire dal 1999 sono stati classificati e suddivisi in diverse classi a seconda dei diversi tipi di modello. Un apposito indice consente di accedere direttamente agli esercizi di ogni tipo, senza dover effettuare ricerche.

N.B. Nella raccolta degli esercizi d'esame si trovano anche esercizi di teoria delle code e di ottimizzazione su grafo, argomenti non più compresi nel programma del corso attuale.

È raccomandabile che lo studente risolva dapprima gli esercizi già classificati e poi provi ad affrontare qualcuno dei temi d'esame, dove gli esercizi sono presentati senza classificazione ed è compito dello studente riconoscere quali di essi siano lineari o non-lineari, continui o discreti.

Tutti gli esercizi sono risolti. È molto raccomandabile che la soluzione sia usata solo come verifica, cioè solo dopo aver compiuto un ragionevole sforzo per risolvere l'esercizio senza averla letta.

## 2 La modellizzazione

Come detto, la modellizzazione è la fase più critica e non esiste un procedimento automatico per affrontarla. Una valida guida però è costituita da un insieme di *consigli* sempre validi e da alcune *domande* che è bene porsi e che sono indipendenti dal problema e quindi sono sempre le stesse. Seguire questi consigli e porsi queste domande dovrebbe guidare il ragionamento nella giusta direzione.

Un primo consiglio è quello di leggere attentamente e almeno due volte il testo. Dal testo dell'esercizio si possono desumere diverse informazioni utili, come verrà illustrato qui di seguito.

Un secondo consiglio è quello di costruire il modello poco per volta, definendo nell'ordine i *dati*, le *variabili*, la *funzione obiettivo* e infine i *vincoli*. A ciascuno di questi quattro passaggi è dedicato uno dei prossimi paragrafi.

## 2.1 I dati

È importante capire quali dati sono coinvolti nel problema e soprattutto determinare le loro *unità di misura*. Le unità di misura servono per verificare che nella funzione obiettivo e nei vincoli non si sommino o si confrontino grandezze dimensionalmente diverse. L'analisi dimensionale della funzione obiettivo e dei vincoli è uno degli strumenti più efficaci per identificare gli errori: infatti l'esperienza insegna che in percentuale molto alta gli errori nei modelli si possono scoprire anche solo con l'analisi dimensionale.

N.B. Può capitare che alcuni dati forniti nell'esercizio siano ridondanti, cioè non siano necessari a definire il modello né a risolverlo. Tuttavia una tipica domanda da porsi sempre per controllare il modello è: *“Ho usato tutti i dati che mi sono stati forniti?”*. Se si scopre che alcuni dati non sono stati usati, la domanda successiva da porsi è: *“È ragionevole che questi dati siano inutili?”*. Trascurare un dato dopo aver riflettuto ed essersi convinti che è superfluo è cosa ben diversa dal dimenticarsi di usarlo.

## 2.2 Le variabili

La scelta delle variabili da usare è probabilmente il punto più cruciale nella modellizzazione matematica di un problema. È essenziale spendere del tempo su questa scelta ed essere sempre disposti a ridiscuterla se necessario. Dalla scelta delle variabili dipende infatti il modo in cui vengono espressi la funzione obiettivo ed i vincoli.

La prima tipica domanda da porsi per definire correttamente le variabili è: *“Cosa bisogna decidere in questo problema?”*. Avendo già definito i dati del problema, dovrebbe essere facile capire cosa *non* è dato. La scelta delle variabili deve sempre accompagnarsi alla definizione delle loro *unità di misura*, analogamente a quanto fatto con i dati. Di ogni variabile devono essere chiari (ed è bene che sia scritto esplicitamente in un commento al modello) il significato e l'unità di misura.

Un'altra domanda utile è: *“Quante sono le variabili?”*. Spesso questa domanda è equivalente a: *“Quanti indici ha ogni variabile?”*.

Insieme al significato è necessario specificare anche la natura delle variabili. Si possono avere variabili discrete (interi o binarie) oppure variabili continue (libere o non-negative). Se il significato e l'unità di misura delle variabili sono stati esplicitati chiaramente, la definizione del loro tipo ne consegue facilmente. A questo proposito è raccomandabile rileggere attentamente il testo dell'esercizio per controllare se nella descrizione data si nasconde qualche assunzione sul fatto che le quantità in gioco possano variare in modo continuo o siano vincolate ad assumere valori discreti, ad esempio multipli di

quantità elementari date. Anche le unità di misura possono aiutare in questo senso: ad esempio una “produzione di sedie” o un “numero di persone” possono assumere solo valori interi, mentre “produzione giornaliera di sedie” o “numero di ore-uomo lavorate” potrebbero assumere anche valori frazionari.

La classificazione del problema in *continuo* o *discreto* dipende immediatamente dal tipo di variabili usate. Le variabili discrete devono essere usate solo se è davvero necessario; ogni volta che un problema si può formulare nel continuo, è opportuno farlo.

Spesso per esprimere l’obiettivo o i vincoli risulta molto utile introdurre variabili ridondanti o variabili ausiliarie. Su questo punto ritorneremo qui di seguito.

### 2.3 La funzione obiettivo

La funzione obiettivo permette di attribuire un valore ad ogni soluzione del problema e quindi di confrontare le soluzioni per stabilire quale sia la migliore. Lo scopo dell’ottimizzazione è di *massimizzare* o *minimizzare* il valore della funzione obiettivo nel rispetto dei vincoli.

Per definire la funzione obiettivo bisogna adottare il punto di vista del decisore e capire in che modo una soluzione possa essere valutata. La domanda da porsi è: “*Date due soluzioni diverse cosa misurerei o calcolerei per decidere quale delle due preferire?*”. Spesso negli esercizi proposti si vogliono *massimizzare* ricavi o guadagni oppure *minimizzare* tempi o costi.

Successivamente si deve rappresentare il valore della soluzione in funzione delle variabili decisionali del problema. È a questo punto che può accadere di incontrare difficoltà nel mettere in relazione il valore delle variabili definite in precedenza con il valore della soluzione.

Può essere che la difficoltà sia dovuta al fatto che il valore della funzione obiettivo dipende da quantità che non sono state definite tra le variabili. Domanda da porsi: “*Una volta fissato il valore delle variabili il valore dell’obiettivo risulta determinato o dipende da qualcos’altro?*”. Nel secondo caso è necessario introdurre le variabili mancanti, ricordandosi di esplicitare il loro significato e la loro unità di misura.

Può anche essere che le variabili definite in precedenza siano invece sufficienti a determinare il valore della funzione obiettivo, ma il legame tra variabili ed obiettivo risulti complicato da esprimere. È proprio in questi casi che è importante introdurre *variabili ausiliarie*. Quali siano le più utili è determinato proprio dalla necessità di scrivere la funzione obiettivo: le variabili ausiliarie giuste sono quelle che consentono di esprimere facilmente la funzione obiettivo. Anche per le variabili ausiliarie introdotte per comodità di

rappresentazione della funzione obiettivo valgono le stesse raccomandazioni già date in precedenza relativamente al significato e alle unità di misura.

Un ultimo consiglio: la funzione obiettivo deve avere a sua volta un'unità di misura, che deve essere controllata e scritta esplicitamente. Se, come spesso accade, la funzione obiettivo è data dalla somma di più addendi, tutti devono avere la stessa dimensione, cioè la stessa unità di misura.

## 2.4 I vincoli

I vincoli determinano la regione ammissibile del problema, cioè distinguono le soluzioni ammissibili da quelle non ammissibili.

Solitamente i vincoli emergono facilmente dalla lettura attenta del testo dell'esercizio. Alcuni tipi di vincoli si ripetono spesso (vincoli di capacità, vincoli di assegnamento...), altri possono essere più difficili da identificare.

Nel caso dei vincoli è utile seguire il consiglio già indicato in precedenza: controllare di aver usato tutti i dati del problema. Un dato non inserito nel modello può indicare ridondanza di informazione ma può anche rivelare che è stato dimenticato un insieme di vincoli.

Consiglio: di solito un problema di minimizzazione presenta vincoli di  $\geq$  mentre un problema di massimizzazione presenta vincoli di  $\leq$ . Domanda da porsi, soprattutto se avete tentato di risolvere un modello e avete scoperto che è illimitato: *“Perché non è possibile dare alle variabili un valore infinitamente alto (o basso) in modo da ottenere un valore infinitamente buono per la funzione obiettivo? Quale vincolo lo impedisce?”*.

Anche i vincoli hanno un'unità di misura che deve essere specificata esplicitamente e usata per il controllo dimensionale, come già consigliato per la funzione obiettivo. È particolarmente importante e utile controllare che i due membri della disequazione o equazione abbiano le stesse unità di misura.

Domanda da porsi sempre per ciascun insieme di vincoli: *“Quanti sono i vincoli di questo tipo?”*. Un facile controllo può essere fatto sugli indici: per ogni insieme di vincoli dello stesso tipo considerate gli indici dei dati e delle variabili che vi compaiono e tenete conto del fatto che le sommatorie su un indice fanno “sparire” la dipendenza dei vincoli da quell'indice. Gli indici non assorbiti dalle sommatorie sono indici dei vincoli nel senso che esistono tanti vincoli del tipo considerato quante le possibili combinazioni dei valori degli indici superstiti. Ricordarsi quindi di indicare accanto ad ogni insieme di vincoli il loro numero, solitamente indicando il campo di variabilità di uno o più indici (ad es.  $\forall j = 1\dots$ ).

Consiglio: assegnare sempre a ciascun vincolo un identificativo mnemonico utile in fase di lettura e interpretazione del file di output.

Anche per esprimere i vincoli può essere utile ricorrere a variabili ausiliarie, esattamente come per la funzione obiettivo.

Se sono state inserite nel modello variabili ausiliarie, è necessario inserire anche altrettanti vincoli per metterle in relazione alle variabili naturali del problema, cioè a quelle variabili che erano state definite inizialmente e che sono sufficienti a determinare univocamente la soluzione se vengono fissate. I vincoli corrispondenti alle variabili ausiliarie possono essere di uguaglianza o di disuguaglianza a seconda dei casi.

Un caso tipico, che merita di essere evidenziato a parte, è quello delle funzioni obiettivo “min max” (o “max min” per analogia). Quando è richiesto di minimizzare la massima tra  $N$  quantità variabili  $x_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , si introduce una variabile ausiliaria  $z$  che funge da obiettivo, assumendo il significato di  $z = \max_{i=1 \dots N} \{x_i\}$  e si introducono poi la funzione obiettivo  $\min z$  e  $N$  vincoli di disuguaglianza del tipo  $z \geq x_i \forall i = 1 \dots N$ . Si noti che in tal caso i vincoli da introdurre sono  $N$  anche se la variabile ausiliaria usata è solo una.

## 2.5 Analisi post-ottimale

Solitamente gli esercizi d’esame di programmazione lineare contengono alcune domande la cui risposta richiede l’analisi del file di output di Lindo. Alcuni esempi tipici sono i seguenti.

- Dal valore ottimo delle variabili si pu vedere quali di esse sono nulle e quali no. Ad esempio se le variabili rappresentano quantit da produrre in un problema di mix ottimale, l’esercizio pu richiedere di specificare quali sono i prodotti convenienti da produrre (variabili positive) e quali no (variabili nulle).
- Dal valore ottimo delle variabili di slack/surplus si pu vedere quali sono i vincoli attivi. Una tipica domanda potrebbe chiedere di indicare quali risorse sono scarse (vincoli attivi, variabili di slack nulle) e quali no (vincoli non attivi, variabili di slack positive).
- Il costo ridotto di una variabile indica la variazione della funzione obiettivo che corrisponde ad un incremento unitario nel valore della variabile. Il prezzo-ombra di un vincolo la variazione della funzione obiettivo che corrisponde ad un decremento unitario del termine noto (assumendo un problema di massimizzazione con vincoli di  $\leq$ ). Questi valori (che sono nulli in corrispondenza di variabili in base e di vincoli non attivi) consentono di rispondere a domande del tipo: “Sarebbe conveniente acquistare quantità ulteriori di risorsa X?”, semplicemente confrontando il loro valore con il dato fornito nell’esercizio.

- L'analisi di sensitività consente di studiare quanto sia stabile la base ottima al variare di un coefficiente nella funzione-obiettivo o di un termine noto. È necessario ricordarsi che gli intervalli indicati sono quelli entro i quali la *base* ottima non cambia. La soluzione invece può cambiare, se l'analisi riguarda il termine noto di un vincolo; il valore della funzione obiettivo può cambiare anche se l'analisi riguarda un coefficiente della funzione obiettivo. Per conoscere quale sia l'andamento della funzione obiettivo al di fuori degli intervalli specificati, necessario ricorrere all'analisi parametrica.
- Lindo consente di eseguire l'analisi parametrica sul termine noto di un vincolo prescelto. Si consiglia di richiedere sempre al programma l'output in formato testo, non solo in formato grafico. Su ogni riga del file di output sono specificate le coordinate di un punto di discontinuità della retta spezzata tipica dell'analisi parametrica dei problemi lineari continui. Spesso gli esercizi richiedono di trovare il punto di ottimo rispetto ad un dato costo che occorre pagare per incrementare il termine noto. In tal caso basta confrontare tale dato con il costo ridotto, che il coefficiente angolare dei segmenti della spezzata. Il punto cercato quello che divide i due segmenti contigui i cui coefficienti angolari sono uno maggiore e l'altro minore del valore dato.

### 3 Lindo

Qui di seguito richiamiamo alcune caratteristiche dei modelli che Lindo accetta in ingresso e diamo alcuni consigli sulla loro scrittura.

**Dati.** Non esiste una parte dichiarativa nei modelli Lindo. I dati del problema non hanno nomi simbolici e i loro valori numerici devono essere inseriti direttamente nel modello. Il coefficiente deve precedere la variabile in ogni monomio. Lindo non ammette che nel modello siano indicate operazioni sui dati. Le operazioni vanno eseguite: ad esempio non si può scrivere “2 \* 3 x1”, ma bisogna scrivere “6 x1”.

**Variabili.** Poiché non esiste una parte dichiarativa, le variabili vengono dichiarate implicitamente dal fatto che stesso che compaiono nel modello con un nome simbolico. Il loro nome non deve eccedere gli otto caratteri, può contenere lettere e cifre e non deve iniziare con una cifra.

È molto raccomandabile inserire in testa al modello con opportuni commenti una sezione dichiarativa, nella quale le variabili vengono definite, insieme al loro significato, numero e unità di misura. La raccomandazione vale anche per le variabili ausiliarie o per quelle che vengono introdotte in un secondo

tempo.

**Funzione obiettivo.** La funzione obiettivo si esprime con la parola chiave “max” oppure “min” seguita direttamente dalla funzione, senza il segno di uguale e senza dare un nome alla funzione.

È raccomandabile far precedere la funzione obiettivo da un commento che indichi il significato e l’unità di misura: ad es. “Massimizzazione dei profitti [Euro/giorno]”.

**Vincoli.** Il sistema dei vincoli è introdotto da “subject to”, abbreviabile in “s.t.” o “st”, che si scrive una volta sola, ed è terminato da “end”. Ogni vincolo deve essere scritto ponendo al primo membro tutti i termini variabili e al secondo membro il termine noto.

N.B. Per ottenere questo risultato ovviamente non bisogna eseguire divisioni, altrimenti il modello diventa non lineare; bisogna semplicemente cambiare di segno ai monomi, spostandoli dal secondo al primo membro (o viceversa).

È raccomandabile far precedere ogni insieme di vincoli di significato analogo da un commento che indichi il significato e l’unità di misura: ad es. “Vincoli di capacità [Kg]”. È anche raccomandabile dare un nome ad ogni vincolo. Il nome di un vincolo è una stringa di non più di otto caratteri alfanumerici seguita dal carattere “)”.

Un paio di finezze estetiche. Le righe del modello possono essere spezzate se sono troppo lunghe; non occorre in tal caso ripetere il segno del monomio come si fa su carta. È consigliabile inoltre lasciare almeno uno spazio tra monomi distinti e anche tra coefficiente e variabile in ogni monomio e possibilmente anche incolonnare i monomi dei vincoli in modo che i monomi relativi ad ogni variabile si trovino sulla stessa colonna, per aumentare la chiarezza e la leggibilità del modello.

## 4 Commenti ed errori

La scomposizione della risoluzione in vari passi più semplici aiuta a mantenere la complessità dei sottoproblemi a livelli accettabili. Si deve sempre tenere presente che l’insieme delle tipologie dei problemi di ricerca operativa non è illimitato: è possibile, anzi probabile, che i modelli studiati durante il corso siano leggermente estesi o modificati per dare origine ad esercizi d’esame. Quindi la conoscenza di questi modelli di base aiuta molto ad affrontare l’esame con successo.

Se durante il processo risolutivo ci si blocca ciò è del tutto normale. Quello che importa è identificare le cause: “Perché non riesco ad esprimere questi vincoli?”. Capire le cause è già aver individuato il modo per superare l’ostacolo incontrato. Molto spesso la scelta da ridiscutere è la scelta delle



variabili o perché non sono sufficienti, o perché sono ridondanti, o perché non hanno l'unità di misura giusta o perché mancano o non hanno il significato giusto.