

## Terremoto.

Dopo un terremoto bisogna portare aiuti alla popolazione colpita. Per questo scopo è disponibile un solo elicottero, che deve visitare un dato insieme di località, partendo da un deposito in posizione nota. Ad ogni località da visitare è associata una classe di priorità, indicata da un intero positivo. Un indice più basso indica maggiore urgenza.

Si vorrebbero visitare tutte le località con indice più basso prima di quelle con indice più alto. Tuttavia, in generale questo porterebbe ad allungare eccessivamente la durata del viaggio. È quindi consentito visitare località con indice più basso dopo averne visitate con indice più alto, purché la differenza tra i due indici sia inferiore ad una data soglia.

Si vuole studiare come varia la lunghezza minima del viaggio, escluso il ritorno al deposito, in funzione della soglia.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel seguito, discutendo ottimalità e unicità della soluzione trovata.

Variante: si rendono disponibile alcuni droni, con ciascuno dei quali può essere servita una località, che quindi l'elicottero può saltare. Ripianificare il percorso ottimo dell'elicottero in questo nuovo scenario, analizzando la sua lunghezza complessiva a seconda del numero di droni disponibili.

## Dati.

I siti da visitare sono 15, oltre al deposito che ha indice 0.

Dei siti da visitare sono note le coordinate nel piano Cartesiano, espresse in chilometri.

Siti	$x$	$y$	Priorità
0	0	0	0
1	-2	19	1
2	14	-4	1
3	-1	13	1
4	8	10	2
5	-2	-3	2
6	10	10	2
7	10	-5	3
8	-8	7	3
9	15	4	3
10	9	-13	4
11	3	-5	4
12	7	13	4
13	-5	-3	5
14	-6	1	5
15	-8	0	5

Tabella 1: Coordinate e indice di priorità di ogni sito.

## Soluzione.

L'esercizio richiede di determinare un percorso che visita i siti indicati, partendo dal deposito: il percorso può essere rappresentato come un cammino Hamiltoniano su un grafo. Il grafo ha  $n + 1$  vertici, uno per ciascuno degli  $n$  siti da visitare più il deposito. I lati del grafo non sono orientati e sono pesati con la distanza Euclidea tra gli estremi. Poiché il cammino è orientato (parte dal deposito ma non torna al deposito), è opportuno sostituire ogni lato non orientato con una coppia di archi orientati, con lo stesso peso.

Le variabili  $x_{ij}$  binarie indicano se ogni arco fa parte della soluzione o no, cioè se l'elicottero viaggia dal sito  $i$  al sito  $j$ . Se si usa la formulazione Dantzig-Fulkerson-Johnson per eliminare i sottocicli, non servono altre variabili. Tuttavia, in tal caso è difficile imporre i vincoli determinati dalle priorità. Risulta invece molto semplice imporli se si usa la

formulazione Miller-Tucker-Zemlin. Introduciamo quindi variabili  $u_i$  per ogni nodo  $i$  diverso dal deposito, imponendo i vincoli

$$0 \leq u_i \leq n-1 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

I vincoli del problema sono anzitutto quelli tipici del TSP asimmetrico, cioè i vincoli sul grado entrante e uscente da ogni nodo ed i S.E.C..

Vincoli sul grado uscente:

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Vincoli sul grado entrante:

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Affinché i vincoli siano corretti, bisogna dare peso molto grande agli autoanelli, oppure eliminare esplicitamente dalle sommatorie l'addendo che corrisponde all'autoanello. Come sono scritti sopra, i vincoli impongono anche il ritorno dell'elicottero al deposito; il termine corrispondente verrà poi trascurato nella funzione obiettivo. Questa soluzione è più semplice rispetto a quella - pur formalmente corretta - che richiede di determinare quale sia l'ultimo nodo raggiunto (introducendo un'apposita variabile binaria) per modificare il vincolo sul grado uscente in tale nodo.

I vincoli di eliminazione dei sottocicli sono:

$$u_j \geq u_i + 1 - n(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j.$$

I vincoli dati dalle priorità impongono che, data una soglia  $\Delta$ , non sia possibile visitare un nodo  $i$  con priorità  $p_i$  prima di un nodo  $j$  con priorità  $p_j$  quando  $p_i > p_j + \Delta$ . In tal modo, per  $\Delta = 0$  i vincoli impongono che le classi di priorità vengano visitate in sequenza senza eccezioni, mentre per  $\Delta = \max_i \{p_i\} - 1$ , ogni cammino Hamiltoniano è ammissibile.

L'obiettivo richiede di minimizzare la lunghezza totale dei tratti percorsi, cioè degli archi selezionati:

$$\text{minimize } z = \sum_{i=0, \dots, n} \sum_{j=1, \dots, n} d_{ij} x_{ij}$$

dove  $d_{ij}$  è la distanza Euclidea tra i siti  $i$  e  $j$ . La seconda sommatoria esclude l'addendo con  $j = 0$ , cioè l'arco con cui l'elicottero torna al deposito.

Il problema così formulato dà luogo ad un modello di programmazione lineare misto-intera, con variabili binarie. La soluzione calcolata dai solutori è quindi garantita essere ottima; non è garantito che sia unica.

Le soluzioni ottime ottenute per diversi valori di  $\Delta$  sono indicati nella tabella.

$\Delta$	$z^*$
0	182.2842027
1	128.0812994
2	109.9765854
3	90.97332515
4	86.35848996

Tabella 2: Valore ottimo in funzione della soglia.

Nella variante in cui la visita di alcuni siti può essere omessa, i vincoli di grado vengono modificati. Anzitutto, occorre introdurre una variabile binaria  $w_i$  per indicare se il sito  $i = 0, \dots, n$  viene visitato o no. Detto  $\sigma$  il numero di siti che è possibile omettere (pari al numero di droni disponibili), deve valere

$$\sum_{i=1, \dots, n} w_i = n - \sigma.$$

Il deposito non può essere omesso: quindi  $w_0 = 1$ .

I vincoli di grado diventano

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = w_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = w_j \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Anche i S.E.C. possono essere leggermente modificati, per renderli più stringenti:

$$u_j \geq u_i + 1 - (n - \sigma)(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j,$$

anche se tale modifica non è strettamente necessaria.

Il modello è ancora di programmazione lineare misto-intera e l'ottimalità è ancora garantita.

In tabella sono riportati per alcuni valori di  $\sigma$  i valori ottimi e i siti omessi, assumendo  $\Delta = 2$ .

$\sigma$	$z^*$	Omessi
1	92.45666518	2
2	81.39440744	2, 10
3	72.49499108	1, 2, 10
4	62.99029032	1, 3, 10, 12

Tabella 3: Valore ottimo  $z^*$  e siti omessi in funzione del numero  $\sigma$  di droni disponibili, assumendo  $\Delta = 2$ .