

Controspionaggio

I servizi segreti hanno scoperto che un certo numero di spie si è infiltrato nel territorio nazionale per carpire importanti segreti. Il controspionaggio è stato allertato per mettere un agente alle calcagna di ciascuna spia, per neutralizzarne l'azione. Il direttore del servizio di controspionaggio ha a sua disposizione un numero di agenti pari al numero di spie e conosce la probabilità di successo di ciascun suo agente nei confronti di ogni spia. L'operazione di controspionaggio avrà successo se e solo se tutte le spie nemiche verranno neutralizzate. Naturalmente, il direttore del servizio di controspionaggio vuole massimizzare questa probabilità, assegnando nel modo più opportuno una spia ad ogni suo agente.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file `Controspionaggio.txt`, discutendo l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Risolvere poi il problema nell'ipotesi che l'operazione abbia successo anche qualora k spie riuscissero a farla franca, per diversi valori di k .

Esempio.

Le spie e gli agenti del controspionaggio sono 10.

Le probabilità di successo del controspionaggio per ogni possibile abbinamento sono indicate nella tabella (riga=spia, colonna=agente).

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.92	.93	.63	.53	.82	.17	.95	.90	.57	.94
2	.97	.79	.82	.76	.76	.24	.76	.99	.65	.90
3	.86	.89	.89	.88	.53	.56	.67	.88	.83	.95
4	.80	.67	.77	.72	.97	.23	.33	.67	.83	.87
5	.90	.74	.65	.54	.98	.32	.93	.65	.77	.79
6	.75	.98	.53	.47	.75	.72	.85	.53	.66	.53
7	.83	.91	.98	.18	.62	.67	.76	.42	.55	.57
8	.80	.74	.74	.64	.94	.98	.23	.27	.82	.65
9	.95	.87	.66	.22	.87	.80	.32	.35	.93	.73
10	.90	.63	.42	.00	.60	.79	.66	.73	.84	.83

Soluzione.

Il problema è un tipico matching bipartito di valore massimo. La difficoltà sta nel fatto che l'obiettivo non è dato dalla somma dei pesi (le probabilità) corrispondenti agli abbinamenti scelti, bensì al loro prodotto.

Osserviamo che

- la funzione logaritmica è monotona crescente, per cui massimizzare z e massimizzare $\log(z)$ porta alla stessa soluzione;
- il logaritmo di un prodotto è pari alla somma dei logaritmi.

Utilizzando queste due osservazioni, si può riformulare il problema come un classico modello di matching bipartito, nel quale il peso delle coppie (s, a) non è P_{sa} bensì $\log(P_{sa})$. Poiché i valori delle P_{sa} sono tutti compresi tra 0 e 1, i valori del logaritmo sono tutti negativi. Il valore ottimo (somma dei logaritmi) risulta quindi negativo e rappresenta il logaritmo della probabilità di successo dell'operazione, la quale è quindi ancora un numero compreso tra 0 e 1.

Dato che possono esistere valori di P pari a 0, possono esistere delle coppie dove l'assegnamento va impedito esplicitamente e il corrispondente addendo non deve figurare nel calcolo dell'obiettivo, per evitare che il solutore debba calcolare il logaritmo di 0 generando errore.

Dati.

Sia n il numero di spie e di agenti del controspionaggio. Siano S e A gli insiemi indicizzati delle spie e degli agenti. Sia P_{sa} la probabilità di successo dell'agente $a \in A$ se abbinato alla spia $s \in S$. Sia k il numero di spie che non contano

ai fini del successo dell'operazione.

Variabili.

Siano $x_{sa} \geq 0$ le variabili di assegnamento tra agenti e spie. Non è necessario dichiararle binarie, poiché il problema di matching bipartito ha soluzione intera anche se formulato nel continuo.

Vincoli.

Vincoli di assegnamento di un agente per ogni spia e una spia per ogni agente. Nella versione in cui alcune spie possono scappare, alcuni assegnamenti possono mancare. Quindi i vincoli sono scritti come disuguaglianze:

$$\sum_{a \in A} x_{sa} \leq 1 \quad \forall s \in S$$

$$\sum_{s \in S} x_{sa} \leq 1 \quad \forall a \in A$$

Assegnamenti proibiti:

$$x_{sa} = 0 \quad \forall s \in S, a \in A : P_{sa} = 0.$$

Numero massimo di assegnamenti che non contano (numero di spie che possono scappare):

$$\sum_{a \in A, s \in S} x_{sa} \geq n - k.$$

Obiettivo.

Massimizzare il logaritmo della probabilità di successo dell'operazione:

$$\text{maximize } z = \sum_{a \in A, s \in S : P_{sa} > 0} \log(P_{sa}) x_{sa}.$$

Classificazione.

Malgrado le apparenze, il modello è di PL. La soluzione calcolata dai solutori è certamente ottima. Nell'esempio proposto, è anche unica, poiché non ci sono variabili fuori base con costo ridotto nullo.

Soluzione ottima.

Nel primo caso (tutte le spie devono essere neutralizzate), il valore ottimo risulta pari a $z^* = -0.5413$ (circa). Quindi la probabilità di successo dell'operazione è pari a $e^{z^*} = 0.582$ (circa).

Nel secondo caso, si hanno i seguenti valori di z^* a seconda del valore di k .

k	z^*
1	-0.3713789624
2	-0.2447410483
3	-0.1934477539
4	-0.1421544595
5	-0.0908611651