

Evacuazione

Alcuni tecnici stanno studiando il piano antincendio per ottimizzare l'evacuazione dei visitatori di un museo. Essi conoscono il layout del museo, che si trova su un unico piano. Si assume come unità di tempo, il tempo che si suppone necessario ad una persona per passare da una stanza a quella adiacente. Da ogni porta tra due stanze possono passare solo un dato numero massimo di persone per unità di tempo. È data anche una tabella con dei valori di intossicazione presunta per le persone da evacuare: i valori aumentano all'aumentare del tempo di permanenza nel museo a partire dal momento in cui scatta l'emergenza. Da un'analisi dei dati storici, i tecnici conoscono un numero atteso di visitatori che si può supporre si trovino in ciascuna delle stanze quando scatta l'emergenza. Si vuole sapere quali potrebbero essere, in un caso ideale, il valore dell'intossicazione totale e dell'intossicazione massima.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file `EVACUAZIONE.TXT`, discutendo ottimalità e unicità delle soluzioni trovate.

Potendo raddoppiare la larghezza di una sola delle porte, su quale conviene intervenire e con quali effetti sugli obiettivi?

Formulare il problema, classificarlo e risolvere nuovamente l'esempio in questo caso.

In realtà lo scenario ottimale è difficile da ottenere, poiché i visitatori non sanno quale sia il percorso migliore (e inoltre non è detto che lo seguirebbero, poiché ciascuno cercherebbe di ottimizzare il proprio obiettivo personale e non quello complessivo). Si pensa quindi di porre in ogni stanza un cartello che indichi la porta da imboccare in caso di emergenza. Con questa soluzione, si assume che tutti seguano i cartelli posti in ogni stanza.

Formulare il problema e classificarlo e risolvere nuovamente l'esempio in questo caso.

Quale sarebbe l'effetto sugli obiettivi?

Esempio

Il museo ha sei stanze.

Stanza	N. vis.
1	24
2	13
3	10
4	8
5	18
6	2

Tabella 1: Numero di visitatori atteso in ogni stanza.

Stanza	Stanza	N.persone
1	2	4
1	3	2
3	4	5
2	4	4
2	6	3
4	5	2
5	6	4
6	7	4
5	7	4

Tabella 2: Numero di persone per unità di tempo che possono transitare tra due stanze S1 e S2 (in qualsiasi direzione). L'esterno è indicato da una stanza 7 fittizia.

Tempo	Intossic.
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	30
8	35
9	39
10	42
11	44
12	45

Tabella 3: Livello di intossicazione in funzione delle unità di tempo trascorse prima di uscire.

Soluzione

Dati. Sia n il numero di stanze e sia $N = \{1, \dots, n+1\}$ l'insieme dei nodi del grafo che rappresenta il museo, dove il nodo di indice $n+1$ è quello fittizio che corrisponde all'esterno del museo.

Sia p_i^0 la popolazione iniziale in ogni nodo $i \in N$.

Sia A l'insieme degli archi. Nell'elenco dato ogni arco compare in una sola direzione, ma va duplicato anche nella direzione opposta perché le porte sono bidirezionali.

Sia u_{ij} la capacità di ogni arco, misurata in persone per unità di tempo.

Per risolvere l'esercizio è consentito discretizzare il tempo. Sia quindi $T = \{1, \dots, T^{max}\}$ l'insieme indicizzato degli intervalli di tempo considerati, dove T^{max} può essere desunto dalla tabella sul livello di intossicazione.

Sia c_t il livello di intossicazione per chi esce dal museo durante l'intervallo $t \in T$.

Variabili. Sia $x_{ijt} \geq 0$ il flusso di persone dal nodo $i \in N$ al nodo $j \in N$ nell'intervallo di tempo t .

Poiché ogni persona impiega un'unità di tempo per fluire da un nodo ad un altro, possono uscire da un nodo durante l'intervallo $t \in T$ solo le persone che vi si trovavano già all'inizio dell'intervallo, ma non quelle che vi giungono durante lo stesso intervallo. Bisogna quindi distinguere le persone già presenti in $i \in N$ all'inizio dell'intervallo $t \in T$ e che non sono uscite e quelle complessivamente presenti nel nodo $i \in N$ al termine dell'intervallo di tempo $t \in T$. Servono quindi due vincoli di conservazione del flusso, non uno, per ogni nodo e per ogni intervallo. Sia $y_{it} \geq 0$ il numero di persone già presenti in $i \in N$ all'inizio dell'intervallo $t \in T$ ma che non escono dal nodo in quell'intervallo. Sia $p_{it} \geq 0$ il numero di persone presenti nel nodo $i \in N$ alla fine dell'intervallo $t \in T$.

Vincoli.

Vincoli di capacità:

$$x_{ijt} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \forall t \in T.$$

Questi vincoli si possono anche (meglio) esprimere come bound sulle variabili.

Vincoli di conservazione del flusso in ogni nodo (solo intervalli $t > 1$). Può uscire nell'intervallo t solo chi era già nel nodo i :

$$p_{i,t-1} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ijt} = y_{it} \quad \forall i \in N, \forall t \in T : t > 1.$$

Idem per $t = 1$:

$$p_i^0 - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij1} = y_{i1}.$$

Al termine dell'intervallo t è presente nel nodo chi vi si trovava già e non ne è uscito e chi è arrivato durante l'intervallo t :

$$y_{it} + \sum_{(j,i) \in A} x_{jit} = p_{it} \quad \forall i \in N, \forall t \in T : t > 1.$$

Vincolo sullo svuotamento di tutti i nodi del grafo entro il tempo T^{max} .

$$\sum_{i \in N : i \leq n} p_{iT^{max}} = 0.$$

Obiettivo. Il primo obiettivo è quello di minimizzare l'intossicazione totale. Tutti coloro che raggiungono l'esterno (nodo $n+1$) durante l'intervallo $t \in T$ hanno un livello di intossicazione pari a c_t .

$$\text{minimize } z = \sum_{t \in T, i \in N : (i, n+1) \in A} c_t x_{i, n+1, t}.$$

Il secondo obiettivo è quello di minimizzare l'intossicazione massima, che, dato l'andamento strettamente crescente dei valori di c_t , corrisponde a minimizzare il massimo indice di $t \in T$ in cui c'è flusso. A questo scopo si può introdurre una variabile binaria w_t per ogni intervallo di tempo $t \in T$, per indicare se t è usato o no dal flusso, modificando i vincoli di capacità in $x_{ijt} \leq u_{ij} w_t \quad \forall (i, j) \in A \forall t \in T$, e minimizzando τ col vincolo $\tau \geq t w_t \quad \forall t \in T$.

Classificazione

Nella versione in cui va minimizzata l'intossicazione totale, il problema è di PL. Nella versione in cui va minimizzata l'intossicazione massima, a causa delle variabili binarie w , il problema è di PLI.

L'ottimalità è garantita in entrambi i casi. La soluzione non è unica in nessuno dei due casi.

Soluzione ottima

La soluzione ottima dell'esempio proposto utilizza 12 periodi di tempo (con obiettivo minmax). Il livello minimo di intossicazione complessiva è pari a 1440 (con obiettivo minsum).

Variante 2: raddoppio della capacità di una porta

Per risolvere il problema in questo caso si può introdurre una variabile binaria δ_{ij} che indica se la capacità dell'arco (i, j) viene raddoppiata o no. Poiché le porte sono bidirezionali bisogna imporre

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad \forall (i, j) \in A.$$

Poiché una sola porta può essere raddoppiata, e questo equivale a scegliere due archi opposti, bisogna imporre

$$\sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij} = 2.$$

I vincoli di capacità vengono quindi modificati così:

$$x_{ijt} \leq u_{ij}(1 + \delta_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A \forall t \in T.$$

In questo modello, quindi, i vincoli di capacità non possono essere inseriti come bound sulle variabili di flusso, ma devono essere espressi esplicitamente come vincoli.

I vincoli che legano i flussi x con le variabili binarie w vanno anch'essi modificati:

$$x_{ijt} \leq 2u_{ij}w_t \quad \forall (i, j) \in A \forall t \in T$$

in modo che restino validi anche nel caso di capacità raddoppiata.

Il modello resta lineare e richiede variabili binarie anche nel caso di ottimizzazione minsum, oltre che nel caso minmax.

La soluzione ottima con obiettivo minsum è 1322 raddoppiando la porta (4, 5); nel caso minmax è 10 raddoppiando la porta (6, 2). L'ottimalità è garantita, l'unicità no. Infatti, imponendo ad esempio il raddoppio della porta (4, 5) si ottiene comunque la soluzione ottima anche per il problema minmax.

Variante 3: uso di cartelli

In questa variante un solo arco uscente da ogni nodo può essere usato. Quindi i flussi seguono un'arborescenza entrante nel nodo fittizio.

Introduciamo variabili binarie s_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$ che indicano se l'arco è indicato da un cartello (1) o no (0).

I vincoli di capacità vengono modificati così:

$$x_{ijt} \leq u_{ij}s_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \forall t \in T$$

L'unicità dei cartelli per ogni stanza viene espressa dai vincoli

$$\sum_{(i,j) \in A} s_{ij} = 1 \quad \forall i \in N.$$

Il modello resta lineare con variabili binarie con entrambi gli obiettivi.

Il modello non ammette soluzione con meno di 14 periodi. Occorre fare qualche ipotesi sul valore di c per indici di periodo superiori a 12. Nel calcolare le soluzioni qui sotto si è mantenuto l'ultimo valore del vettore c anche per i periodi aggiunti.

La soluzione ottima con obiettivo minsum è 1552; nel caso minmax è 14. L'ottimalità è garantita, l'unicità no. Date le scelte sui cartelli, è unica la soluzione dei flussi, ma non è detto che la scelta ottimale dei cartelli sia unica.