

Costellazioni.

Su un'antichissima pergamena alcuni archeologi hanno ritrovato dei puntini. Uno di loro ipotizza che si tratti della riproduzione di alcune costellazioni celesti. Per verificare l'affascinante ipotesi, gli archeologi si procurano un atlante celeste, che riproduce la posizione relativa di alcune delle stelle più luminose visibili da quella zona.

Naturalmente, essi non hanno alcuna certezza che tutte le stelle visibili siano state effettivamente riprodotte sulla pergamena. Essi osservano anche con rammarico che alcuni dei puntini sulla pergamena potrebbero essersi prodotti per il deterioramento.

Pur non conoscendo quale fosse la precisione dei mezzi di osservazione dell'antichità, gli archeologi vorrebbero trovare la miglior corrispondenza possibile tra i puntini sulla pergamena (almeno alcuni di essi) e le stelle visibili nella zona (almeno alcune di esse).

Sapreste aiutarli ad identificare l'ipotesi più plausibile?

Formulare il problema e classificarlo. Risolvere l'esempio descritto nel file `COSTELLAZIONI.TXT`, discutendo ottimalità e unicità delle soluzioni trovate.

Esempio.

Mappando la pergamena su un sistema di riferimento Cartesiano si ottengono le coordinate dei puntini riportate in Tabella 1. Mappando l'atlante celeste su un sistema di riferimento Cartesiano si ottengono le coordinate delle stesse riportate in Tabella 2.

Punto	x	y
1	62.972	52.384
2	77.140	58.590
3	39.803	113.529
4	47.893	99.025
5	23.495	106.526
6	63.986	65.816
7	44.275	109.757
8	73.416	52.058
9	87.804	132.086
10	97.758	73.833

Tabella 1: Coordinate dei puntini sulla pergamena

Stella	x	y
1	34.70	51.34
2	34.19	36.08
3	44.43	56.32
4	79.16	45.02
5	96.71	62.97
6	55.36	30.19
7	63.62	58.58
8	30.28	41.97
9	67.11	17.82
10	6.01	4.89

Tabella 2: Coordinate delle stelle sull'atlante celeste.

Soluzione.

Dati. Sono dati l'insieme indicizzato P dei puntini con le coordinate cartesiane (x_i^p, y_i^p) di ogni puntino $i \in P$ sulla pergamena e l'insieme indicizzato S delle stelle con le coordinate cartesiane (x_j^s, y_j^s) di ogni stella $j \in S$ sull'atlante.

Variabili. Il problema consiste nel trovare una trasformazione che porti alcuni puntini a coincidere almeno approssimativamente con alcune stelle. Tale trasformazione deve essere il più generale possibile: quindi può comprendere una

traslazione e una rotazione, dal momento che i sistemi di riferimento sulla pergamena e sull'atlante sono del tutto scorrelati tra loro. Inoltre non si hanno informazioni sulla scala utilizzata nei due casi e quindi è necessario prevedere anche un fattore di scala. Siano quindi α l'angolo che descrive la rotazione (compreso in un intervallo ampio 2π), Δ_x e Δ_y le due traslazioni (continue e non vincolate in segno) e ρ il fattore di scala (variabile continua e non-negativa).

Indichiamo quindi con (\bar{x}_i, \bar{y}_i) le coordinate roto-traslate e scalate di ogni puntino $i \in P$. Infine, indichiamo con w_{ij} la variabile binaria che indica che il puntino $i \in P$ corrisponde alla stella $j \in S$.

Vincoli. Le coordinate modificate sono calcolate come segue:

$$\bar{x}_i = \rho (\Delta_x + x_i^p \cos \alpha - y_i^p \sin \alpha)$$

$$\bar{y}_i = \rho (\Delta_y + x_i^p \sin \alpha + y_i^p \cos \alpha)$$

Ogni puntino può essere associato ad una stella, al massimo:

$$\sum_{j \in S} w_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in P$$

Ogni stella può essere associata ad un puntino, al massimo:

$$\sum_{i \in P} w_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in S$$

Altri vincoli impongono che l'abbinamento tra un puntino $i \in P$ ed una stella $j \in S$ è possibile solo quando i punti (\bar{x}_i, \bar{y}_i) e (x_j^s, y_j^s) sono abbastanza vicini. Per definire quantitativamente cosa significhi "abbastanza vicini" introduciamo quindi un parametro ϵ . I vincoli si possono scrivere in due modi diversi. Una prima possibilità richiede di introdurre un'ulteriore non-linearità nel modello, dovuta al prodotto tra variabili:

$$w_{ij}((\bar{x}_i - x_j^s)^2 + (\bar{y}_i - y_j^s)^2) \leq \epsilon^2 \quad \forall i \in P, j \in S.$$

Una seconda possibilità richiede l'uso di una costante M "grande abbastanza" per disattivare il vincolo quando non c'è l'abbinamento:

$$(\bar{x}_i - x_j^s)^2 + (\bar{y}_i - y_j^s)^2 \leq \epsilon^2 + M(1 - w_{ij}) \quad \forall i \in P, j \in S.$$

La prima delle due possibilità dovrebbe essere la più efficace dal punto di vista dell'uso dei solutori.

Obiettivo. L'obiettivo è trovare il maggior numero possibile di corrispondenze plausibili tra puntini e stelle:

$$\text{maximize } z = \sum_{i \in P} \sum_{j \in S} w_{ij}.$$

Classificazione. Il problema è non-lineare e ha variabili sia continue che discrete. Il suo rilassamento continuo non è convesso. Quindi i solutori come Knitro possono trovare minimi locali.

Il valore ottimo di z dipende da come viene scelto il valore di ϵ . Quindi, più che cercare una soluzione ottima, in questo caso ha senso affrontare il problema come problema a due obiettivi, avendo come secondo obiettivo la minimizzazione di ϵ . Per esplorare la regione Pareto-ottima, è raccomandabile fare l'analisi parametrica sull'obiettivo z che è discreto, non sul valore di ϵ che è continuo. Si può quindi applicare il metodo dei vincoli, imponendo

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in S} w_{ij} \geq K$$

e minimizzando ϵ , scegliendo ogni volta un diverso valore di K .

Costruire la regione Pareto-ottima non è detto sia banale, perché i solutori impiegano molto tempo per trovare ottimi globali. Una volta trovata la regione Pareto-ottima, si può utilizzare ad esempio il criterio della massima curvatura (o meglio, il suo analogo nel discreto), il che porta a scegliere $K = 5$. Infatti, l'esempio è stato costruito proprio perturbando casualmente le posizioni delle stelle 1, 2, 4, 5 e 8 e mantenendo lo stesso indice per le stelle e per i puntini. All'ottimo si ha quindi $w_{11} = w_{22} = w_{44} = w_{55} = w_{88} = 1$. Una volta fissate le variabili discrete, il problema di PNL nel continuo restante è convesso e quindi l'ottimo è globale.