

Connessione.

Si vogliono connettere tra loro in fibra ottica alcune località in posizione nota nel piano. A questo scopo si possono usare stazioni intermedie localizzabili liberamente. Poiché la fibra costa, si vuole minimizzarne la quantità necessaria complessivamente.

Classificare il problema e risolvere l'esempio descritto nel file `Connessioni.txt`. Discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione trovata.

Suggerimento 1: all'ottimo, il numero di stazioni da usare è pari al numero di località meno 2.

Suggerimento 2: all'ottimo, ogni stazione ha grado complessivo pari a 3.

Esempio.

Le località da connettere sono 6.

	x	y
1	15	10
2	10	20
3	10	15
4	45	12
5	30	20
6	40	25

Tabella 1: Coordinate delle località da connettere [km].

Soluzione.

Il grafo che connette a minimo costo è l'albero ricoprente. Se i punti dati dovessero essere connessi direttamente tra loro, l'esercizio sarebbe il calcolo dell'albero ricoprente di costo minimo. La possibilità di usare stazioni intermedie consente di trovare soluzioni di costo inferiore. Il problema è noto come Steiner Tree Problem ed è NP-hard. Quella proposta è la versione nel piano Euclideo; un problema simile si può formulare anche su grafo, dove le stazioni possono essere poste solo in un insieme finito di luoghi candidati. I punti dati (nell'esempio, le località) sono detti "terminali" mentre i punti intermedi (nell'esempio, le stazioni) sono detti "punti di Steiner". La soluzione è quindi un albero ricoprente di costo minimo sui punti di Steiner a cui si aggiungono le necessarie connessioni tra i punti di Steiner ed i terminali.

Dati. Sia T l'insieme indicizzato dei terminali. Sia S l'insieme indicizzato dei punti di Steiner, di cardinalità $|T| - 2$. Siano (x_t^T, y_t^T) le coordinate di ogni terminale $t \in T$.

Variabili. Siano (x_s^S, y_s^S) le coordinate di ogni punto di Steiner $s \in S$. Indichiamo con $E' = T \times S$ l'insieme delle coppie (terminale, punto di Steiner). Indichiamo con E'' l'insieme delle coppie non ordinate di punti di Steiner distinti (gli autoanelli non possono far parte dell'albero da trovare).

Introduciamo per comodità le variabili ausiliarie che rappresentano le distanze:

$$d'_{ts} = \sqrt{(x_t^T - x_s^S)^2 + (y_t^T - y_s^S)^2} \quad \forall (t, s) \in E'$$

$$d''_{ij} = \sqrt{(x_i^S - x_j^S)^2 + (y_i^S - y_j^S)^2} \quad \forall [i, j] \in E''$$

Per definire l'albero, associamo una variabile binaria ad ogni lato: a'_{ts} per ogni $(t, s) \in E'$ e a''_{ij} per ogni $[i, j] \in E''$.

Obiettivo. L'obiettivo è quello di minimizzare la somma delle lunghezze dei lati usati:

$$\text{minimize } z = \sum_{(t,s) \in E'} d'_{ts} a'_{ts} + \sum_{[i,j] \in E''} d''_{ij} a''_{ij}$$

Vincoli. Il grado dei terminali deve essere pari a 1:

$$\sum_{(t,s) \in E'} a'_{ts} = 1 \quad \forall t \in T.$$

Ci sono diverse possibilità di scrivere la formulazione che definisce un albero ricoprente sui punti di Steiner.

Una prima opzione consiste nell'orientare i lati in archi a partire da un punto di Steiner \bar{s} scelto arbitrariamente, che funge da radice dell'arborescenza. Questo significa raddoppiare il numero delle variabili a'' , che vengono quindi definite per ogni coppia ordinata $(i, j) \in S \times S$ anziché per ogni coppia non ordinata $[i, j] \in E''$. Nell'arborescenza orientata e radicata in \bar{s} tutti i punti di Steiner diversi da \bar{s} hanno grado entrante pari a 1. Inoltre non si devono formare sottocicli.

Scegliendo senza perdita di generalità $\bar{s} = 1$,

$$\sum_{i \in S} a''_{ij} = 1 \quad \forall j \in S : j \neq 1.$$

Avendo orientato gli archi, si possono proibire i sottocicli come si fa nel TSP con la formulazione MTZ: si inseriscono variabili u_s , intere, di valore compreso tra 1 e $|S|$ e si impongono i vincoli

$$u_j \geq u_i + 1 - |S|(1 - a''_{ij}) \quad \forall (i, j) \in S \times S.$$

Una seconda possibilità, che non richiede di orientare i lati e non richiede le variabili intere del modello MTZ, è quella basata sul flusso, dove si impone che un'unità di flusso parta dalla radice \bar{s} e arrivi a ciascun altro punto di Steiner. Anziché un numero lineare in $|S|$ di variabili intere, servono un numero quadratico in $|S|$ di variabili continue. Indichiamo i flussi (orientati) con le variabili $w_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in S \times S$. I vincoli sono

$$\sum_{i \in S} w_{ij} = 1 + \sum_{i \in S} w_{ji} \quad \forall j \neq \bar{s}.$$

$$\sum_{i \in S} w_{i\bar{s}} = (1 - n) + \sum_{i \in S} w_{\bar{s}i}.$$

I lati (non orientati) inclusi nell'albero sono tutti (e soli) quelli attraversati da flusso (orientato):

$$w_{ij} + w_{ji} \leq a''_{ij}(|S| - 1) \quad \forall [i, j] \in E''.$$

Una terza opzione, che non richiede di orientare i lati, né di inserire altre variabili, ma richiede un numero esponenziale di vincoli, è quella basata sui vincoli che si usano nel modello DFJ del TSP. Si impone che l'albero ricoprente contenga $|S| - 1$ lati

$$\sum_{[i,j] \in E''} a''_{ij} = |S| - 1$$

e per vietare i sottocicli si può usare la versione ai tagli o quella ai cicli:

$$\sum_{[i,j] \in E'' : i \in N \wedge j \notin N} a''_{ij} \geq 1 \quad \forall N \subset S.$$

$$\sum_{[i,j] \in E'' : i \in N \wedge j \in N} a''_{ij} \leq |N| - 1 \quad \forall N \subseteq S.$$

Il suggerimento n.2 si può tradurre in un vincolo sul grado dei punti di Steiner, ma ciò non è necessario per formulare il problema. E' una caratteristica della soluzione ottima, che si può facilmente controllare a posteriori.

Classificazione. Il problema è non-lineare e misto, includendo sia variabili continue, come le coordinate (x^S, y^S) sia discrete come a' e a'' . Per ogni data scelta dei valori discreti, il sotto-problema non-lineare continuo è convesso. Quindi l'ottimalità globale è garantita dai solutori che eseguono un'enumerazione implicita sulle variabili discrete.