

Fotocopie.

Due gruppi di lavoro formati ciascuno da un dato numero di persone, devono eseguire fotocopie. Ciascuna persona deve eseguire un dato numero di fotocopie ed il tempo che impiega è direttamente proporzionale a tale numero. Per tempo di completamento di una persona si intende l'istante in cui essa termina di fare le sue fotocopie.

Ciascun gruppo è dotato di una fotocopiatrice ed è facile dimostrare che per minimizzare il tempo di completamento complessivo delle persone in ogni gruppo, è ottimale eseguire le fotocopie ordinando le persone per numero di fotocopie non-decrescente. In questo modo è stato previsto il tempo di completamento di ogni persona e di conseguenza anche il tempo di completamento totale in ogni gruppo, cioè la somma dei tempi di completamento delle persone nel gruppo. Per lo stesso motivo le persone in ogni gruppo sono state numerate secondo l'ordine sopra descritto.

Purtroppo, però, una delle due fotocopiatrici è rotta e quindi tutte le persone di entrambi i gruppi devono servirsi dell'unica fotocopiatrice funzionante. Per evitare di litigare per ore su chi debba fare le fotocopie per primo, viene richiesto l'intervento di un esperto di ottimizzazione, affinché definisca la sequenza ottimale. Per garantire una soluzione equa, all'esperto viene richiesto di minimizzare il massimo ritardo complessivo tra i due gruppi. Per ritardo complessivo di un gruppo si intende la somma dei ritardi delle persone in quel gruppo; per ritardo di una persona si intende la differenza tra il suo tempo di completamento nella sequenza con una sola fotocopiatrice ed il tempo di completamento che la persona avrebbe avuto nel caso con due fotocopiatrici.

È facile dimostrare che all'interno di ogni gruppo deve ancora valere lo stesso ordinamento di cui sopra.

Formulare il problema e classificarlo. Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel seguito, discutendo ottimalità e unicità della soluzione trovata.

Dati.

Le persone sono 5 per ogni gruppo. Il numero di fotocopie richieste per ciascuna persona di ciascun gruppo è riportato in Tabella 1.

Persona	Gruppo A	Gruppo B
1	14	15
2	18	16
3	21	22
4	25	23
5	25	23

Tabella 1: Numero di fotocopie da fare.

Soluzione.**Dati.**

Sono dati:

- il numero di persone n_j in ogni gruppo $j = 1, 2$;
- l'insieme indicizzato N_j delle persone in ogni gruppo $j = 1, 2$;
- il numero di fotocopie p_{ij} per ogni persona $i \in N_j$ di ogni gruppo $j = 1, 2$;
- un insieme di indicizzato S di posizioni nella sequenza da determinare, che ha un numero di elementi pari al numero totale di persone di tutti i gruppi: $S = 1, \dots, n_1 + n_2$.

Variabili.

Un modo di rappresentare la sequenza è di formulare il problema come assegnamento tra l'insieme delle persone e quello delle posizioni. A questo scopo si introducono variabili binarie di assegnamento: ogni variabile x_{ijs} indica se la persona $i \in N_j$ del gruppo $j = 1, 2$ è assegnata alla posizione $s \in S$ o no.

Vincoli.

Il problema richiede i seguenti vincoli.

- Un assegnamento per ogni posizione:

$$\sum_{i \in N_1} x_{i1s} + \sum_{i \in N_2} x_{i2s} = 1 \quad \forall s \in S.$$

- Un assegnamento per ogni persona:

$$\sum_{s \in S} x_{ijs} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \forall i \in N_j.$$

- Definizione del ritardo di ogni persona: il ritardo di una generica persona i del gruppo j è dato dalla somma dei processing times delle persone dell'altro gruppo che vengono inserite in S prima di lei. Se la persona i dell'insieme j è inserita in posizione s , essa è preceduta da $s - i$ persone dell'altro gruppo. Il ritardo della persona i del gruppo j , indicato con L_{ij} , è quindi dato dalla somma dei primi $s - i$ processing times dell'altro gruppo.

$$L_{ij} = \sum_{s \in S} (x_{ijs} \sum_{h \in N_{3-j}: h \leq s-i} p_{h,3-j}) \quad \forall j = 1, 2, \forall i \in N_j.$$

Nella formula si è indicato con $3 - j$ l'indice del gruppo diverso da j .

Obiettivo.

L'obiettivo è la minimizzazione del massimo ritardo totale tra i due gruppi. Trattandosi di un obiettivo di tipo min-max, va linearizzato introducendo una variabile ausiliaria, δ :

$$\text{minimize } z = \delta$$

$$\delta \geq \sum_{i \in N_j} L_{ij} \quad \forall j = 1, 2.$$

Così formulato, il problema è di PLI. Pertanto è garantita l'ottimalità della soluzione (non l'unicità).

Una sequenza ottima prevede di alternare le persone dei gruppi come segue: (1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1). Essa implica un ritardo di $z^* = 228$ fotocopie per il primo gruppo e di 226 fotocopie per il secondo gruppo.