

Lo zoo

Lo zoo ospita diversi animali, ciascuno dei quali ha un fabbisogno nutritivo giornaliero noto. La direzione può acquistare 4 diversi tipi di prodotti alimentari per animali. È nota la composizione di tali prodotti, cioè la percentuale di sostanze nutritive contenuta in ciascuno di essi. Si vuole decidere come soddisfare a costo minimo le esigenze nutritive degli animali dello zoo.

Si vuole inoltre studiare la convenienza dell'eventuale acquisto di un altro prodotto composto esclusivamente da carne, latte, frutta e verdura.

Si vuole sapere se accettare il dono di un sultano che vorrebbe regalare allo zoo fino a 5 elefanti e fino a 8 giraffe e l'acqua necessaria a mantenerli. Quanti elefanti e quante giraffe potrebbe accettare lo zoo senza aumentare i propri costi?

Infine si vuole sapere se sia conveniente dotare lo zoo di un orso in più.

Formulare e risolvere con i dati seguenti.

Animale	N. esemplari
Antilope	1
Babbuino	2
Canguro	1
Dromedario	1
Elefante	1
Fringuello	8
Giraffa	1
Ippopotamo	1
Koala	3
Leone	2
Mufone	2
Narvalo	1
Orso	1
Pappagallo	8
Rinoceronte	1
Serpente	6
Tapiro	1
Upupa	4
Visone	4
Zebra	2

Tabella 1: Numero di esemplari per ogni tipo di animale.

Sostanze	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4
Carne	80	5	0	25
Latte	0	5	0	0
Frutta	0	25	30	5
Verdure	5	40	25	10
Zuccheri	5	0	0	0
Grassi	0	0	0	15
Farine	0	0	25	0
Acqua	10	25	20	45

Tabella 2: Composizione percentuale dei prodotti [righe = sostanze nutritive; colonne = prodotti].

Dati ulteriori. Il Prodotto 5 ha la seguente composizione: carne 50%, latte 5%, frutta 10%, verdura 35%. Il suo prezzo è $0,5 \text{Euro}/kg$.

L'acquisto di un ulteriore orso porterebbe un incasso aggiuntivo di 90 Euro al giorno.

Animale	Carne	Latte	Frutta	Verdure	Zuccheri	Grassi	Farine	Acqua
A	0.0	0.0	0.0	2.0	0.2	0.5	1.0	3.0
B	1.0	1.0	3.0	0.3	0.2	0.2	0.0	2.0
C	0.1	0.5	0.1	1.0	0.1	0.3	0.0	4.0
D	0.5	0.5	1.0	0.5	0.1	0.5	0.5	5.0
E	0.0	0.5	5.0	9.0	0.5	1.0	1.0	9.0
F	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1
G	0.0	0.0	0.2	3.0	0.0	0.0	0.0	4.0
I	0.0	0.0	8.0	6.0	0.5	1.0	0.0	20.0
K	0.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.2	0.5
L	5.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.5	0.0	5.0
M	0.0	1.0	0.0	5.0	0.0	0.0	0.0	3.0
N	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0	0.0
O	5.0	0.5	3.0	1.0	0.0	0.0	0.0	10.0
P	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.5
R	1.0	0.0	0.0	12.0	0.0	2.0	0.0	15.0
S	0.5	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1
T	0.0	0.2	1.0	9.0	0.2	0.5	0.0	6.0
U	0.0	0.0	0.0	0.5	0.1	0.0	0.5	1.0
V	0.0	0.2	0.5	3.0	0.0	0.0	1.0	1.0
Z	0.0	0.0	0.0	5.0	0.5	0.2	0.5	5.0

Tabella 3: Fabbisogno giornaliero (in chilogrammi per ogni esemplare) [righe = animali; colonne = sostanze nutritive].

Prodotto	Costo
Prod. 1	5
Prod. 2	2
Prod. 3	3
Prod. 4	4

Tabella 4: Costi dei prodotti [Euro/Kg].

Soluzione

Dati. Si hanno:

- un insieme \mathcal{A} di animali;
- un insieme \mathcal{P} di prodotti;
- un insieme \mathcal{N} di sostanze nutritive;
- il numero di esemplari n_k per ogni tipo di animale $k \in \mathcal{A}$ (dalla Tabella 1);
- la percentuale a_{ij} di sostanza $j \in \mathcal{N}$ in ogni prodotto $i \in \mathcal{P}$ (dalla Tabella 2);
- il fabbisogno giornaliero f_{jk} di ogni prodotto j per ogni esemplare di animale $k \in \mathcal{A}$ [kg/giorno] (dalla Tabella 3);
- il prezzo d'acquisto p_i di ogni prodotto $i \in \mathcal{P}$ [Euro/kg] (dalla Tabella 4).

Variabili decisionali. Le variabili corrispondono alle quantità di ogni prodotto che si decide di acquistare; tali quantità non sono vincolate ad assumere valori interi. Si ha quindi $x_i \geq 0$ per ogni prodotto $i \in \mathcal{P}$ [kg].

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo z da minimizzare è il costo totale, cioè la somma pesata delle quattro variabili, dove il peso di ciascuna è il costo del prodotto:

$$z = \sum_{i \in \mathcal{P}} p_i x_i.$$

Vincoli. I vincoli richiedono che la quantità di sostanze nutritive nei prodotti acquistati sia sufficiente a soddisfare il fabbisogno complessivo degli animali: esiste quindi un vincolo per ogni tipo di sostanza nutritiva. Il primo membro di ogni vincolo, ossia la quantità di sostanza nutritiva acquistata, è dato dalla somma pesata delle variabili dove il coefficiente di ciascuna variabile è la percentuale di sostanza nutritiva nel prodotto, come si ricava dai dati della tabella 2. Il secondo membro, cioè il termine noto, è la somma del fabbisogno giornaliero di quella sostanza ottenuto sommando tutti i fabbisogni giornalieri degli animali dello zoo opportunamente moltiplicati per il numero di esemplari di ciascun animale.

Esiste quindi un vincolo per ogni sostanza nutritiva $j \in \mathcal{N}$:

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} a_{ij} x_i \geq \sum_{k \in \mathcal{A}} f_{jk} n_k.$$

Il problema ha quindi 4 variabili e 8 vincoli di disuguaglianza, cui corrispondono in forma standard altre 8 variabili (di surplus).

All'ottimo, come in ogni soluzione di base, solo 4 vincoli sono attivi, ossia solo 4 variabili sono nulle (a parte eventuali casi di degenerazione). Infatti nella soluzione (file ZOO.OUT) sono attivi gli ultimi 4 vincoli, mentre esiste un surplus per le prime 4 sostanze.

Il quinto prodotto, di cui si chiede di valutare la convenienza, è composto solo da carne, latte, frutta e verdura, cioè da sostanze che hanno tutte una variabile di surplus strettamente positiva e quindi un prezzo-ombra nullo. Quindi il quinto prodotto non è conveniente (neppure se fosse regalato).

Il mantenimento di altri elefanti, a parte l'acqua che sarebbe fornita dal sultano, richiederebbe però zuccheri, farine e grassi, che sono risorse scarse con prezzi ombra positivi. Pertanto i costi aumenterebbero.

Il mantenimento di altre giraffe invece richiederebbe, oltre all'acqua, solo risorse non scarse, il cui surplus basta (e avanza) per 8 giraffe.

Infine il mantenimento di un orso in più non costerebbe per quanto riguarda le prime 4 risorse (prezzo ombra nullo), ma costerebbe per quanto riguarda l'acqua. Poichè il prezzo ombra dell'acqua è pari a 8 Euro/litro e il fabbisogno giornaliero dell'orso è pari a 10 litri, il costo giornaliero per lo zoo aumenterebbe di 80 Euro, ma poichè l'orso ha un rendimento giornaliero stimato pari a 90 Euro, il suo acquisto è vantaggioso.