1 Lo zaino

Dato uno zaino di capacità nota ed un insieme di oggetti di dato volume e valore, un mercante vuole selezionare il sottinsieme di oggetti di massimo valore che può inserire nel suo zaino.

Oggetto	Volume	Valore
1	41	16
2	39	19
3	45	19
4	28	12
5	56	22
6	58	29
7	37	18
8	63	26
9	49	22
10	33	14
11	42	19
12	52	25

Tabella 1: Volume e valore degli oggetti.

Lo zaino ha capacità pari a 300.

Risolvere l'esercizio in tre casi diversi.

- Caso 1: gli oggetti sono da intendere come sostanze (farina, sale, zucchero,...) disponibili in quantità illimitata in confezioni frazionabili a piacere; il loro volume è da intendere come volume unitario (misurato ad esempio in litri/Kg, con la capacità dello zaino espressa in litri) ed il loro valore è da intendere come valore unitario (misurato ad esempio in €/Kg).
- Caso 2: gli oggetti sono da intendere come confezioni indivisibili (scatolette di tonno, di carne in scatola, cartocci di succo di frutta,...) disponibili in numero illimitato; il loro volume è da intendere come volume di ogni confezione (espressa ad esempio in litri/confezione, con la capacità dello zaino espressa in litri) ed il loro valore è da intendere come valore di ogni confezione (espresso ad esempio in €/confezione).
- Caso 3: gli oggetti sono da intendere come singoli oggetti unici e indivisibili (tenda, picozza, lampada...), il loro volume ed il loro valore sono il volume (espresso in litri) ed il valore (espresso in €) di ogni singolo oggetto.

Soluzione commentata. Trattiamo separatamente i tre casi.

Caso 1.

Dati. Sono date N sostanze. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, N$ ciascuna di esse. Indichiamo con $c_i \ \forall i = 1, \dots, N$ il valore unitario di ciascuna [€/Kg]. Indichiamo con $a_i \ \forall i = 1, \dots, N$ il volume unitario di ciascuna [lt/Kg]. Indichiamo con b la capacità dello zaino [lt].

Variabili. Nel Caso 1, è richiesto di determinare la *quantità di ciascuna sostanza* da inserire nello zaino. Tale decisione è quindi rappresentabile da una variabile decisionale x_i, continua e non-negativa per ogni sostanza $i = 1, \dots, N$. E' importante notare che in questo caso le variabili sono continue, poiché le confezioni in cui sono disponibili le diverse sostanze sono frazionabili a piacimento. Abbiamo quindi le variabili

$$x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, N.$$

Poiché rappresentano le quantità di ciascuna sostanza, le variabili x sono espresse in chilogrammi.

Vincoli. Esiste solo un vincolo di capacità, che impone che la somma dei volumi delle quantità di sostanza scelte non ecceda la capacità dello zaino:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b.$$

Poiché i volumi unitari a sono espressi in lt/Kg e la variabili x sono espresse in Kg, entrambi i membri del vincolo sono espressi in litri.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il valore complessivo del contenuto dello zaino. Quindi:

$$\text{maximize } z_1 = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i.$$

Poiché i valori unitari c sono espressi in €/Kg e le variabili x sono espresse in Kg, la funzione obiettivo è espressa in €.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{maximize } \ z_1 = & \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b \\ & x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Il modello risultante è un semplice modello di PL. Prima ancora di risolverlo, si può notare che il modello nella formulazione alle disuguaglianze ha N variabili ed un vincolo di disuguaglianza. Una volta messo in forma standard, esso ha quindi $N + 1$ variabili ed un vincolo di uguaglianza. Pertanto il tableau ha una sola colonna in base e N colonne fuori base. Quindi N tra le $N + 1$ variabili devono essere nulle in ogni soluzione di base, inclusa la soluzione ottima. Se l'unica variabile non nulla è la variabile di slack, ciò corrisponde ad avere $x_i = 0$ per tutte le sostanze $i = 1, \dots, N$ e di conseguenza la variabile di slack pari alla capacità dello zaino. Questa però non può essere la soluzione ottima (a meno che i valori delle sostanze non siano tutti negativi o nulli!). Quindi nella soluzione ottima deve comparire una variabile sola con valore positivo (cioè deve essere scelta una sola sostanza) e la sostanza corrispondente deve riempire tutto lo zaino, in modo che anche la variabile di slack sia nulla. E' anche possibile sapere subito quale dev'essere tale sostanza. Infatti, è facile intuire che il modo migliore di usare la capacità disponibile consista nel riempire lo zaino della sostanza che ha il rapporto più alto tra valore unitario e volume unitario. Denominiamo tale rapporto c_i/a_i *efficienza*, indichiamolo con η_i e calcoliamone il valore per ogni sostanza.

La sostanza con la massima efficienza è la sostanza 6. La soluzione ottima quindi consiste nel prendere 100 litri di sostanza 6 e può essere quindi determinata senza neppure eseguire l'algoritmo del simplesso, ma solo ragionando sulla struttura del modello di PL del problema. Si ha quindi $x_6^* = b/a_6 = 5,17 \ Kg$, $x_i^* = 0 \ \forall i \neq 6$, e $z_1^* = c_6 x_6^* = 150 \ e$.

Caso 2.

La differenza fondamentale rispetto al caso 1 è che nel caso 2 le confezioni non sono frazionabili a piacimento, bensì possono essere scelte in un numero intero.

Sostanza i	Volume a_i	Valore c_i	Efficienza η_i
1	41	16	0,390
2	39	19	0,487
3	45	19	0,422
4	28	12	0,429
5	56	22	0,393
6	58	29	0,500
7	37	18	0,486
8	63	26	0,413
9	49	22	0,449
10	33	14	0,424
11	42	19	0,452
12	52	25	0,481

Tabella 2: Volume unitario, valore unitario ed efficienza delle sostanze.

Dati. Sono dati N tipi di oggetti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ciascuno di essi. Indichiamo con c_i $\forall i = 1, \ldots, N$ il valore di ogni confezione per ciascun tipo [€/confezione]. Indichiamo con a_i $\forall i = 1, \ldots, N$ il volume di ogni confezione per ciascun tipo [litri/confezione]. Indichiamo con b la capacità dello zaino [litri], come nel caso 1.

Variabili. Anche nel Caso 2 è richiesto di determinare la *quantità per ogni tipo di oggetto* da inserire nello zaino, ma stavolta tale quantità è rappresentata dal *numero di confezioni scelte*. Tale decisione è quindi rappresentabile da una variabile decisionale x_i, intera e non-negativa per ogni tipo di oggetto $i = 1, \ldots, N$. E' importante notare che in questo caso le variabili sono intere, poiché le confezioni disponibili non sono frazionabili. Abbiamo quindi le variabili

$$x_i \in \mathbb{Z}_+ \ \forall i = 1, \ldots, N.$$

L'unità di misura delle variabili in questo caso la confezione.

Vincoli. Come nel caso 1 esiste solo un vincolo di capacità, che impone che la somma dei volumi delle confezioni scelte non ecceda la capacità dello zaino:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b.$$

Poiché i volumi unitari a sono espressi in litri/confezione e la variabili x sono espresse in confezioni, entrambi i membri del vincolo sono espressi in litri.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il valore complessivo del contenuto dello zaino. Quindi:

$$\text{maximize } z_2 = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i.$$

Poiché i valori unitari c sono espressi in €/confezione e le variabili x sono espresse in confezioni, la funzione obiettivo è espressa in €.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{maximize } \ z_2 = &\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \\ \text{subject to} &\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b \\ &x_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Il modello risultante è di PLI. Malgrado la somiglianza col caso precedente, esso ha caratteristiche molto diverse. Le considerazioni sul modello fatte nel caso 1, qui non sono più valide. Non è possibile determinare a priori quanti siano i tipi diversi di oggetti che compaiono nello zaino all'ottimo. L'unica cosa certa è che il modello nel caso 2 è una *restrizione* del modello nel caso 1, o equivalentemente che il modello del caso 1 è un *rilassamento* del modello nel caso 2. Si ha quindi certamente $z_2^* \leq z_1^*$.

Risolvendo il modello, si trova la seguente soluzione ottima: $x^* = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$ con $z_2^* = 148$ (che, come previsto, risulta non maggiore di $z_1^* = 150$). Diversamente dal caso 1, più tipi di oggetto compongono la soluzione ottima (tre in questo esempio) ed il tipo di oggetto con la massima efficienza non è incluso nella massima quantità possibile. In questo esempio la capacità dello zaino risulta completamente utilizzata all'ottimo, ma in generale non è detto che sia così. Basti pensare a cosa accadrebbe se tutti i volumi unitari fossero pari e la capacità dello zaino fosse dispari: per qualunque soluzione ammissibile almeno un'unità di capacità residua resterebbe necessariamente inutilizzata.

Caso 3.

Nel caso 3 si tratta di un tipico problema di *selezione*: è richiesto infatti di scegliere alcuni elementi da un insieme dato, N, per formare un suo sottinsieme S. A questo scopo si utilizzano variabili binarie che formano il *vettore caratteristico* del sottinsieme S: ogni variabile binaria x_i corrisponde ad un elemento i-esimo dell'insieme dato, N; se la variabile x_i vale 1, l'elemento i è selezionato in S; se la variabile x_i vale 0, no. Formalmente il significato delle variabili è

$$x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S.$$

Le variabili decisionali quindi non rappresentano quantità, bensì decisioni di tipo "sì/no".

Dati. Sono dati N oggetti singoli e indivisibili. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ogni oggetto. Indichiamo con c_i il valore di ogni oggetto $i = 1, \ldots, N$ (espresso in €). Indichiamo con a_i il volume di ogni oggetto $i = 1, \ldots, N$ (espresso in lt). Indichiamo con b la capacità dello zaino (espresso in lt).

Variabili. Come già osservato, il problema decisionale consiste nel decidere *quali* oggetti inserire nello zaino. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni oggetto:

$$x_i \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, N.$$

Le variabili in questo caso sono adimensionali, poiché non rappresentano quantità.

Vincoli. Il vincolo è lo stesso dei due casi precedenti.

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b.$$

Poiché i dati a sono espressi in litri e le variabili x sono adimensionali, entrambi i membri del vincolo sono espressi in litri.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il valore complessivo degli oggetti scelti. Quindi:

$$\text{maximize } z_3 = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i.$$

Poiché i dati c sono espressi in €e le variabili x sono adimensionali, la funzione obiettivo risulta espressa in €.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{maximize } \ z_3 = & \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Anche in questo caso si ottiene un modello di PLI, ma con variabile binarie. Questo tipo di modelli viene anche indicato come PL0-1 o programmazione binaria.

Come nel caso 2, non abbiamo alcuna garanzia sulla struttura della soluzione ottima. L'unica cosa garantita a priori è che il caso 3 rappresenta un'ulteriore restrizione rispetto al caso 2 e quindi si ha necessariamente $z_3^* \leq z_2^*$.

Si può essere tentati di pensare che la soluzione ottima si possa ottenere ordinando gli oggetti per efficienza decrescente e poi selezionandoli uno per volta controllando per ciascuno se la capacità residua è sufficiente a contenerlo e decidendo di conseguenza. Si tratta, in effetti, di un comune e intuitivo *algoritmo euristico*, che però non garantisce affatto di produrre la soluzione ottima. Anche in questo esempio, ciò non si verifica. L'algoritmo produrrebbe una soluzione con gli oggetti 2, 6, 7, 9, 11 e 12 (proprio i 6 con la massima efficienza) di valore $z_3 = 132$. Ma la soluzione ottima è diversa e vale $z_3^* = 139$ (che, per inciso, è non maggiore di $z_2^* = 148$, come previsto). La soluzione ottima richiede di non selezionare l'oggetto 2, anche se la sua efficienza è la seconda nell'ordinamento, bensì gli oggetti 4 e 10.

Anche in questo caso vale l'osservazione che in generale non è detto che la capacità venga completamente utilizzata, anche quando la soluzione è ottima. Infatti all'ottimo la somma dei volumi degli oggetti scelti è 299 e un'unità di capacità resta inutilizzata.

Inoltre, si pone la domanda se la soluzione così trovata sia unica. In generale la risposta è "no": nei problemi di ottimizzazione discreta può capitare molto più frequentemente che nel continuo che esistano soluzioni ottime multiple. Ciò accade anche nel nostro esempio. Oltre alla soluzione ottima $x' = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1]$ già descritta, ne esiste un'altra, $x'' = [0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]$, nella quale vengono occupate 296 unità di capacità e 4 restano inutilizzate.

Poiché il vincolo di capacità è l'unico, esso ovviamente non è ridondante: se il vincolo non ci fosse, la soluzione ottima cambierebbe (andrebbe all'infinito nel caso 2, comprenderebbe tutti gli oggetti nel caso 3). Quindi, a differenza di quanto capita nel continuo, il vincolo è "attivo" anche se non è soddisfatto all'uguaglianza.