

Vendemmia Un'azienda vinicola vuole ottimizzare le operazioni di vendemmia e produzione del vino. L'azienda produce un dato insieme di vini e coltiva un dato insieme di tipi di vitigni. Ogni vino è composto da una data frazione di uve di diversi tipi di vitigni: ci sono vini per i quali si usa un unico tipo e altri (*blended*) per i quali si mescolano in date proporzioni uve di vitigni diversi. Al termine della vendemmia sono note le quantità di uva raccolte per ogni tipo di vitigno. L'azienda conosce il valore commerciale di ogni tipo di vino e vuole ottenere un mix di vini che rispetti date percentuali minime e massime per ogni vino sul totale. Durante la lavorazione, parte della vendemmia si perde ed è noto il coefficiente di conversione espresso in litri di vino per ogni chilogrammo di uva. Si vuole massimizzare il valore di mercato dei vini ottenuti.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati riportati nel seguito.

Potendo acquistare un ulteriore quantità di uva (di un solo tipo di vitigno) da altri produttori, di quanto potrebbe aumentare il ricavo in base alla quantità acquistata? Scegliere un tipo di vitigno per questa analisi.

Studiare come varierebbe la soluzione ottima se si imponesse che le quantità prodotte per ogni tipo di vino debbano essere tali da poter confezionare ogni tipo di vino in cartoni contenenti 12 bottiglie da 0.75 litri.

Dati. I vini sono 5, i tipi di vitigno sono 3.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Vendemmia |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| 1 | 1.0 | 0.3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 550 |
| 2 | 0.0 | 0.7 | 1.0 | 0.4 | 0.0 | 620 |
| 3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.6 | 1.0 | 430 |

Table 1: Composizione dei vini [frazione] e quantità vendemmiate [Kg].

| | min | max | prezzo |
|---|------|------|--------|
| 1 | 0.20 | 0.25 | 10.0 |
| 2 | 0.15 | 0.20 | 6.5 |
| 3 | 0.20 | 0.25 | 22.0 |
| 4 | 0.15 | 0.20 | 17.0 |
| 5 | 0.20 | 0.25 | 25.0 |

Table 2: Frazioni minime e massime e valore commerciale [Euro/litro] di ogni vino.

Coefficiente di conversione: da ogni chilogrammo di uva si ricavano 0.7 litri di vino.

Soluzione.

Dati. Il modello richiede di definire un insieme V di vini ed un insieme T di tipi di vitigni. Si indica con f_{tv} la frazione di vino $v \in V$ ottenuta dal vitigno di tipo $t \in T$. Si indica con r_t la quantità di vitigno $t \in T$ ricavata dalla vendemmia. Si indica con k il coefficiente di conversione. Si indicano con \underline{a}_v e con \bar{a}_v le frazioni minima e massima per ogni vino $v \in V$. Si indica con c_v il valore commerciale del vino $v \in V$.

Variabili. Il problema è una variante del problema di mix produttivo ottimale. Si può risolvere introducendo variabili, che indichiamo con x_v , espresse in chilogrammi, che indicano la quantità di uva usata per ogni tipo di vino $v \in V$. Sono variabili continue e non-negative.

Vincoli. I vincoli del problema devono imporre che la miscelazione avvenga nelle frazioni date e che le quantità di ogni tipo di vitigno utilizzate non eccedano quelle disponibili:

$$\sum_{v \in V} f_{tv} x_v \leq r_t \quad \forall t \in T \text{ [Kg]}.$$

Infine vanno imposti i vincoli sul mix di vini desiderato:

$$x_v \geq \underline{a}_v \sum_{j \in V} x_j \quad \forall v \in V \text{ [Kg]}$$

$$x_v \leq \bar{a}_v \sum_{j \in V} x_j \quad \forall v \in V \text{ [Kg]}.$$

Obiettivo. La funzione obiettivo da massimizzare è

$$z = \sum_{v \in V} c_v k x_v \text{ [Euro]}.$$

Modello. Il modello risultante è di Programmazione Lineare. La soluzione quindi è garantita essere ottima. Essa è anche unica poiché nessuna variabile fuori base ha costo ridotto nullo.

Analisi parametrica. L'unico tipo di vitigno su cui ha senso eseguire l'analisi parametrica richiesta è il terzo, poiché dei primi due tipi c'è un avanzo positivo e quindi il prezzo-ombra della risorsa è nullo.

Il prezzo-ombra del terzo tipo di uva all'ottimo è 39.89 Euro/Kg e tale valore rimane valido per un aumento della quantità disponibile da 430 Kg fino a 433.25 Kg. In corrispondenza di tale valore l'obiettivo sale da 17151.81 Euro a 17281.57 Euro. Oltre tale valore il prezzo-ombra dell'uva scende a 17.64 Euro/Kg. Questo prezzo-ombra vale fino a 577.53 Kg. In corrispondenza di tale valore della quantità disponibile l'obiettivo sale a 19827.26 Euro. Oltre tale valore il prezzo-ombra della risorsa si annulla e quindi l'acquisto di ulteriori quantità di uva non è più conveniente.

Variante discreta. Per poter confezionare i vini in cartoni da 12 bottiglie da 0.75 litri, bisogna imporre che le quantità prodotte per ogni tipo di vino,

misurate in litri, siano multipli interi di 9. Si introducono quindi variabili intere non-negative y_v con i vincoli $x_v = 12 * 0.75 * y_v \ \forall v \in V$. Il modello risultante è di Programmazione Lineare Intera. Il valore ottimo scende da 17151.81 Euro del caso lineare continuo a 16834.5 Euro. La soluzione è ancora garantita essere ottima.