

Tulipani

Un giardiniere olandese deve pianificare la produzione di tulipani per la prossima stagione. Egli ha a disposizione un appezzamento rettangolare di dimensioni note e deve dividerlo verticalmente in un dato numero di strisce di larghezza variabile, all'interno di ciascuna delle quali verranno coltivati tulipani di un dato tipo. Ogni striscia deve essere interamente coltivata e va divisa orizzontalmente in due parti, una per i tulipani destinati alla vendita sul mercato nazionale e l'altra per i tulipani da esportazione. Ci sono dei vincoli sulle dimensioni che le strisce possono avere e sulla frazione minima e massima di tulipani di ogni tipo da destinare all'esportazione. In particolare, il giardiniere è obbligato a coltivare ogni tipo di tulipano su una striscia di data larghezza minima definita per legge. Egli può lasciare una striscia verticale incolta, se necessario.

Il giardiniere conosce il prezzo di vendita dei tulipani sia nel caso di commercio nazionale sia nel caso di esportazione. Egli sa anche di quanto abbisogna ogni tipo di tulipano in termini di acqua e concimi (occorrono due tipi di concimi), che sono disponibili in quantità limitate e note.

Il giardiniere vuole massimizzare i profitti.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati forniti. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

1. Un suo fornitore gli offre concimi di entrambi i tipi a prezzi ridotti del 50% rispetto al prezzo di listino che è di 50 Euro al chilogrammo. Dire se conviene accettare le offerte.
2. Quale dovrebbe essere il prezzo di vendita nazionale dei tulipani prodotti in quantità minima affinché diventi conveniente produrli in quantità maggiori?
3. L'ente preposto alla navigazione mercantile sta progettando lo scavo di un nuovo canale navigabile, che taglierebbe il terreno in orizzontale, parallelamente al lato di 100 metri. Si vuole stimare quale sarebbe la perdita economica che il giardiniere subirebbe in questo ipotetico scenario a seconda della posizione del canale, cioè dell'area coltivabile persa.

Esempio.

Il terreno è rettangolare con base 100 metri e altezza 50 metri.

I tipi di tulipano sono cinque.

Ciascuno richiede una striscia (verticale, alta 50 metri) di larghezza pari ad almeno 5 metri.

Per ogni tipo di tulipano la percentuale destinata all'esportazione deve essere compresa entro i limiti indicati in tabella 1.

Tulipano	Min	Max
A	10%	40%
B	15%	60%
C	5%	75%
D	50%	100%
E	0%	50%

Tabella 1: Limiti percentuali di tulipani da esportazione.

Ciascun tipo di tulipano richiede per ogni metro quadrato le quantità di acqua e concimi indicate in tabella 2.

Tulipano	Acqua (mc)	Concime A (kg)	Concime B (kg)
A	4.0	1.2	0.5
B	3.0	1.5	0.4
C	8.5	0.3	1.3
D	1.0	2.8	1.0
E	2.5	1.9	0.8

Tabella 2: Consumo unitario di risorse per ogni metro quadro coltivato.

Risorsa	Quantità
Acqua (mc)	30000
Concime A (kg)	3000
Concime B (kg)	5000

Tabella 3: Risorse disponibili.

Tulipano	Nazionale	Esportazione
A	60	90
B	80	110
C	120	155
D	75	100
E	80	85

Tabella 4: Prezzo di vendita dei tulipani (espresso in Euro/mq).

Soluzione.

Dati. Sia T l'insieme dei tulipani. Siano B e H la base e l'altezza del terreno (metri). Sia B^{min} la larghezza minima di ogni striscia coltivata (metri). Siano ϵ_t^{min} ed ϵ_t^{max} le percentuali minima e massima di tulipani da esportazione per ogni tipo $t \in T$. Siano p_t^n e p_t^e i prezzi di tulipani di tipo $t \in T$ sul mercato nazionale e su quello da esportazione (euro/mq). Siano h_t (mc/mq), a_t (kg/mq) e b_t (kg/mq) i fabbisogni unitari di acqua, concime A e concime B per i tulipani di tipo $t \in T$. Siano Δ^h (mc), Δ^a (kg) e Δ^b (kg) le quantità totali disponibili di tali risorse.

Variabili. Siano x_t^n e x_t^e le aree destinate alla coltivazione del tulipano $t \in T$ rispettivamente per il mercato nazionale e per l'esportazione. Esse sono continue e non-negative e sono espresse in metri quadri.

Vincoli. Il problema richiede vincoli sul consumo di tre risorse limitate. Il primo è espresso in metri cubi, gli altri due in chilogrammi.

$$\sum_{t \in T} h_t(x_t^n + x_t^e) \leq \Delta^h$$

$$\sum_{t \in T} a_t(x_t^n + x_t^e) \leq \Delta^a$$

$$\sum_{t \in T} b_t(x_t^n + x_t^e) \leq \Delta^b$$

Esistono poi limiti sulle frazioni minime e massime da esportazione.

$$x_t^e \geq \frac{\epsilon_t^{min}}{100}(x_t^n + x_t^e) \quad \forall t \in T$$

$$x_t^e \leq \frac{\epsilon_t^{max}}{100}(x_t^n + x_t^e) \quad \forall t \in T$$

Infine bisogna imporre i vincoli sull'area coltivabile, espressi in metri quadri.

$$x_t^n + x_t^e \geq B^{min} H \quad \forall t \in T \quad (1)$$

$$\sum_{t \in T} (x_t^n + x_t^e) \leq BH. \quad (2)$$

Obiettivo. L'obiettivo da massimizzare è il valore commerciale dei tulipani coltivati, espresso in Euro.

$$\text{maximize } z = \sum_{t \in T} (p_t^n x_t^n + p_t^e x_t^e).$$

Classificazione. Il modello risultante è di programmazione lineare (file `Tulipani.mod`) e la soluzione fornita dai solutori è quindi garantita essere ottima. La soluzione ottima dell'esempio proposto (file `Tulipani.out`) ha un valore di 565251,846 Euro. Nessuna variabile fuori base ha costo ridotto nullo; pertanto la soluzione ottima di questo esempio è unica.

Analisi post-ottimale.

1. Il concime A ha un prezzo-ombra di 33,27 euro al chilogrammo. Pertanto, l'acquisto di ulteriori quantità al prezzo di 25 euro al chilogrammo è conveniente. L'analisi parametrica sul vincolo del concime A dà il seguente esito:

Intervallo		Prezzo-ombra
3000	4495,45455	33,27
4495,45455	4690,19608	22,63158

Poiché oltre la quantità di 4495,45455 chilogrammi il prezzo-ombra scende al di sotto dei 25 euro al chilogrammo, non conviene acquistare quantità maggiori.

Il concime B invece ha prezzo-ombra nullo, poiché non è usato completamente. Quindi l'offerta non è conveniente.

2. I tulipani prodotti in quantità minima nella soluzione ottima sono quelli per cui si ha $x_t^n + x_t^e = B^{\min}H$. Essi sono i tipi A, D ed E, per i quali i vincoli (1) sono attivi. Per tutti i tipi, sono attivi in vincoli sulla quantità massima destinata all'esportazione, come è logico attendersi dato che il prezzo di vendita è maggiore a parità di risorse necessarie per la coltivazione.

Affiché sia conveniente produrli in quantità superiori al minimo, ovvero il loro corrispondente vincolo (1) non sia più attivo, si considera l'aumento del prezzo di vendita per i tulipani da esportazione. Il prezzo di vendita deve aumentare fino a provocare un cambio di base, come indicato dall'analisi di sensitività. I valori sono riportati nella tabella seguente.

Tipo	Aumento di prezzo (euro/kg)
A	80,12658
D	9,18776
E	41,58439

3. Alla terza domanda si risponde eseguendo l'analisi parametrica sul valore di H . Si nota che H compare sia nei vincoli (1) che nel vincolo (2). Pertanto, per eseguire l'analisi parametrica su un unico vincolo, basta inserire una variabile α che prende il posto di H nei vincoli del modello (senza inficiarne la linearità) e aggiungere il vincolo $\alpha = H$ su cui eseguire l'analisi parametrica al diminuire di H .

L'analisi parametrica dà il seguente esito.

H (metri)	z^* (euro)
50	565251,846
43.22767	567352,30548
42.59967	566071,81868
40.95563	551365,1877
0	0

Come si può notare, inizialmente la perdita di area coltivabile non provoca un danno, ma un vantaggio. Infatti, al diminuire di H , mentre si restringe il vincolo (2) che non è attivo, si rilassano i vincoli (1) che sono attivi; pertanto il valore dell'obiettivo migliora. Dopo il primo cambio di base, quando il vincolo (2) diventa attivo, il valore ottimo inizia a peggiorare al diminuire di H .