

Trasferte.

Un torneo si disputa con un doppio girone all'italiana, in cui cioè ogni squadra gioca contro ogni altra sia in casa che in trasferta. Partecipano n squadre (con n pari) ed il torneo quindi richiede $2(n - 1)$ turni. In ogni turno si disputano $n/2$ incontri, in ciascuno dei quali $n/2$ squadre giocano in casa e $n/2$ in trasferta. Ogni squadra ha la sua base in una città diversa (quindi tutte le trasferte sono vere trasferte). Sono note le distanze tra tutte le città ove sono ubicate le squadre.

Si vuole comporre il calendario del torneo in modo ottimale nel rispetto di alcuni vincoli:

- il calendario del girone di ritorno deve essere identico a quello del girone di andata, scambiando gli incontri in casa con quelli in trasferta;
- in ciascuno dei due gironi (andata e ritorno) per ogni squadra il numero di partite in casa e il numero di partite in trasferta devono differire di una sola unità;
- nessuna squadra deve giocare in trasferta o in casa per tre o più volte consecutive (questo vincolo deve essere soddisfatto anche a cavallo tra la fine del girone di andata e l'inizio di quello di ritorno).

Quando una squadra gioca un incontro in trasferta preceduto e seguito da incontri in casa, essa fa un viaggio di andata e ritorno. Quando però gioca due incontri in trasferta consecutivi, per risparmiare sui costi di viaggio essa si trasferisce direttamente dalla città della prima trasferta a quella della seconda trasferta e ritorna alla propria città solo dopo aver disputato entrambi gli incontri in trasferta.

Considerare due obiettivi: (a) minimizzare la distanza totale percorsa da tutte le squadre; (b) minimizzare la massima differenza nella distanza totale percorsa dalle squadre (assumendo naturalmente che ciascuna minimizzi la propria distanza totale).

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati riportati nel file `Trasferte.txt`. Discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Esempio.

Le squadre partecipanti al torneo sono 12. La matrice delle distanze tra le città è descritta nella tabella 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	116	132	156	169	174	187	190	200	215	221	229
B	116	0	129	141	158	169	185	189	198	210	214	225
C	132	129	0	128	142	160	173	182	195	204	208	222
D	156	141	128	0	114	138	150	180	190	197	201	207
E	169	158	142	114	0	120	145	171	178	179	185	194
F	174	169	160	138	120	0	126	146	157	171	177	184
G	187	185	173	150	145	126	0	130	140	161	165	191
H	190	189	182	180	171	146	130	0	125	141	155	174
I	200	198	195	190	178	157	140	125	0	113	135	172
J	215	210	204	197	179	171	161	141	113	0	131	120
K	221	214	208	201	185	177	165	155	135	131	0	118
L	229	225	222	207	194	184	191	174	172	120	118	0

Tabella 1: Distanze tra le città.

Soluzione commentata.

Si tratta di un problema di assegnamento tra gli elementi di tre insiemi: le squadre in casa, le squadre in trasferta e i turni di gara.

Dati.

Siano $N = \{1, \dots, n\}$ l'insieme indicizzato delle n squadre e $T = \{1, \dots, 2(n-1)\}$ l'insieme indicizzato dei turni. Si noti che n è dato, mentre la cardinalità di T si ricava di conseguenza.

Variabili.

L'assegnamento tra i tre insiemi si rappresenta con variabili binarie con tre indici: $x_{ijt} = 1$ se e solo se si disputa l'incontro tra $i \in N$ e $j \in N$ nel turno $t \in T$, dove la squadra i gioca in casa e la squadra j gioca in trasferta.

Vincoli.

I vincoli che definiscono un calendario valido sono vincoli di assegnamento, come segue.
Nessuna squadra può mai giocare con se stessa:

$$x_{jjt} = 0 \quad \forall j \in N, \forall t \in T.$$

In ogni turno ogni squadra gioca una partita (in casa o in trasferta):

$$\sum_{i \in N} (x_{ijt} + x_{jit}) = 1 \quad \forall j \in N, \forall t \in T.$$

I due gironi di andata e ritorno devono essere simmetrici:

$$x_{i,j,t} = x_{j,i,t+(n-1)} \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T : t \leq n-1.$$

Ogni coppia di squadre si deve incontrare una volta nel girone di andata. Automaticamente il vincolo vale anche per il girone di ritorno, grazie ai vincoli precedenti.

$$\sum_{t \in T: t \leq T/2} (x_{ijt} + x_{jit}) = 1 \quad \forall i \in N, j \in N : i \neq j.$$

In ogni girone, ogni squadra gioca un numero di partite in casa ed un numero di partite in trasferta che differiscono di 1. Basta imporre il vincolo su un girone affinché valga anche per l'altro.

$$-1 \leq \sum_{t \in T: t \leq (n-1)} \sum_{i \in N} (x_{ijt} - x_{jit}) \leq 1 \quad \forall j \in N.$$

Nessuna squadra deve giocare tre (o più) incontri consecutivi in casa o in trasferta:

$$\sum_{i \in N} (x_{j,i,t-1} + x_{j,i,t} + x_{j,i,t+1}) \leq 2 \quad \forall j \in N, \forall t \in T : 1 < t < |T|.$$

$$\sum_{i \in N} (x_{i,j,t-1} + x_{i,j,t} + x_{i,j,t+1}) \leq 2 \quad \forall j \in N, \forall t \in T : 1 < t < |T|.$$

Scrivere i vincoli in questo modo (e non separatamente per il girone di andata e per il girone di ritorno) consente di imporre il vincolo anche alle terne di turni consecutivi a cavallo tra la fine del girone di andata e l'inizio di quello di ritorno.

Obiettivo.

Per comodità introduciamo le variabili δ_i per indicare la distanza complessiva percorsa dalla squadra $i \in N$.

Per rappresentare correttamente le distanze percorse, si possono introdurre ulteriori variabili binarie: $y'_{ij} = 1$ se e solo se la squadra $j \in N$ si sposta con andata e ritorno nella città della squadra $i \in N$; $y''_{ijk} = 1$ se e solo se la squadra $k \in N$ gioca in trasferta consecutivamente contro la squadra i e contro la squadra j .

Le variabili y' e y'' vanno collegate con le variabili x con opportuni vincoli come segue.

La squadra j percorre un viaggio di andata e ritorno nella città i in caso di trasferta singola:

$$\sum_{k \in N} x_{j,k,t-1} + x_{i,j,t} + \sum_{k \in N} x_{j,k,t+1} - 2 \leq y'_{ij} \quad \forall i, j \in N : i \neq j, \forall t \in T : 1 < t < |T|.$$

$$x_{i,j,1} + \sum_{k \in N} x_{j,k,2} - 1 \leq y'_{ij} \quad \forall i, j \in N : i \neq j.$$

$$\sum_{k \in N} x_{j,k,|T|-1} + x_{i,j,|T|} - 1 \leq y'_{ij} \quad \forall i, j \in N : i \neq j.$$

La squadra k percorre un viaggio di due tappe nelle città i e j in caso di trasferte consecutive:

$$x_{i,k,t} + x_{j,k,t+1} - 1 \leq y''_{ijk} \quad \forall i, j, k \in N : i \neq j \neq k, \forall t \in T : t < |T|.$$

La distanza totale percorsa da ogni squadra $k \in N$ risulta quindi

$$\delta_k = \sum_{i \in N} 2d_{ik}y'_{ik} + \sum_{i \in N, j \in N : i \neq j \neq k} (d_{ki} + d_{ij} + d_{jk})y''_{ijk} \quad \forall k \in N.$$

Il primo obiettivo da minimizzare è la distanza totale percorsa da tutte le squadre.

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{k \in N} \delta_k.$$

Il secondo obiettivo da minimizzare è una massima differenza e quindi deve essere linearizzato con una variabile ausiliaria Δ , che rappresenta la massima differenza di distanza percorsa da due squadre.

$$\text{minimize } z_2 = \Delta$$

con i vincoli

$$\Delta \geq \delta_i - \delta_j \quad \forall i \neq j \in N.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare intera con variabili binarie.

I solutori disponibili in AMPL (CPLEX, GuRoBi) non riescono a trovare la soluzione ottima in tempi ragionevoli. Se ci riuscissero, sarebbe garantita l'ottimalità delle soluzioni, non la loro unicità.