

Il tempo è denaro.

L'impianto produttivo di una casa motociclistica non è sfruttato al 100%, poiché è sovradimensionato rispetto alle attuali dimensioni del mercato. Pertanto, la direzione aziendale ha deliberato di studiare la possibilità di affiancare alla produzione attuale una produzione supplementare, che consiste nell'assemblaggio di alcuni tipi diversi di motocicli nuovi.

Per l'assemblaggio di motocicli nuovi sono necessari tre componenti principali, che verrebbero forniti mensilmente in quantità fisse e note. Anche i ricavi unitari ottenibili dall'assemblaggio dei motocicli sono noti.

L'assemblaggio di ogni motociclo richiede un certo tempo di manodopera. Poiché la manodopera costa, l'azienda vuole anche minimizzare il numero di giorni-uomo necessari all'assemblaggio.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio descritto nel file `TEMPODEN.TXT`.

Domanda 1. Quali tipi di motociclo sarebbe più conveniente assemblare e vendere se la manodopera fosse disponibile gratuitamente in quantità molto grande? In tal caso, quale dovrebbe essere la variazione del prezzo di vendita dei motocicli non convenienti per renderli convenienti?

Domanda 2. Sempre nella stessa ipotesi, i componenti verrebbero smaltiti allo stesso ritmo della fornitura o l'assemblaggio potrebbe provocare rimanenze di pezzi non assemblati? Quanto grandi?

Domanda 3. Per quale prezzo della manodopera non sarebbe conveniente la produzione supplementare?

Domanda 4. Qual è il massimo prezzo della manodopera per cui è ottimale la produzione calcolata nella risposta 1? Quale sarebbe il corrispondente ricavo?

Domanda 5. Qual è la quantità ottimale di manodopera da impiegare se il costo della manodopera è di 1000 €/mese-uomo? Si supponga di poter impiegare almeno un lavoratore anche a tempo parziale se necessario.

Esempio.

I tipi di motociclo sono 3 e altrettanti sono i componenti principali.

Motociclo	Ricavo
1	1200
2	1300
3	1200

Tabella 1: Ricavi unitari dalle vendite [€/motociclo].

Motociclo	Tempo
1	1
2	1
3	1

Tabella 2: Tempi di assemblaggio [giorni-uomo/motociclo].

	1	2	3
A	10	12	14
B	5	7	6
C	10	15	9

Tabella 3: Coefficienti tecnologici [pezzi/motociclo].

Mat.pr.	Quantità
A	91
B	40
C	59

Tabella 4: Disponibilità di materia prima [pezzi/mese].

Soluzione.

Il problema è di programmazione lineare e ha due obiettivi conflittuali: massimizzare i ricavi ottenibili e minimizzare la quantità di manodopera impiegata.

Siano M l'insieme dei motocicli e C l'insieme dei componenti.

Ci sono tre variabili continue non-negative x_j , che indicano la quantità di motocicli assemblati mensilmente per ogni tipo $j \in M$,

Ci sono tre vincoli tecnologici

$$\sum_{i \in C} a_{ij} x_j \leq b_i$$

corrispondenti ai tre componenti consumati: a_{ij} indica la quantità di componenti di tipo $i \in C$ che serve per ogni motociclo di tipo $j \in M$, mentre b_i indica il numero di componenti di tipo $i \in C$ disponibili ogni mese.

Ci sono due funzioni obiettivo conflittuali: z_1 rappresenta il ricavo mensile dato dall'assemblaggio dei motocicli

$$z_1 = \sum_{j \in M} p_j x_j,$$

dove p_j indica il ricavo unitario per ogni motociclo di tipo $j \in M$; z_2 indica il

numero di ore-uomo di manodopera impiegate ogni mese:

$$z_2 = \sum_{j \in M} t_j x_j,$$

dove t_j indica la quantità di manodopera necessaria per l'assemblaggio di ogni motociclo di tipo $j \in M$.

Risposta 1. Se la manodopera non costituisse un vincolo né implicasse costi, la produzione ottima (espressa in motocicli per mese) sarebbe

$$x = \begin{bmatrix} 0, 14 \\ 0 \\ 6, 4 \end{bmatrix}$$

con $z_1 = 7848$ €/mese. Quindi sarebbe conveniente assemblare motocicli del primo e del terzo tipo, ma non del secondo.

Affinché anche i motocicli del secondo tipo diventino convenienti, il loro prezzo dovrebbe aumentare di 428 €/motociclo. Questo è infatti il costo ridotto della variabile x_2 , che è fuori base nella soluzione ottima.

Risposta 2. Del secondo componente risulta una lieve eccedenza di 0,9 pezzi/mese.

Risposta 3. Nella soluzione ottima ricavata in precedenza il rapporto tra z_1 e z_2 è pari a 1200 €/mese-uomo. Questo è quindi il valore della manodopera per il quale la soluzione ottima precedente avrebbe profitto nullo (i costi della manodopera sarebbero pari ai ricavi). Si può quindi eseguire l'analisi parametrica sul coefficiente c che pesa i due obiettivi nella funzione obiettivo

$$z = z_1 - cz_2$$

a partire da $c = 1200$ €/mese-uomo. Dall'analisi parametrica si ottiene in una sola iterazione che il cambio di base successivo si ha per $c = 1300$ €/mese-uomo e da tale valore in poi la soluzione ottima consiste nell'azzerare la produzione, poiché sarebbe in perdita.

Risposta 4. Partendo da $c = 0$, con obiettivo z , dall'analisi di sensitività sul coefficiente c della variabile z_2 si ricava che la base ottima della risposta 1 resta ottima (e quindi anche la soluzione ottima resta la stessa) fino al valore $c = 972, \overline{72}$ €/mese-uomo. Oltre tale valore entra in base x_2 ed esce di base x_1 e quindi cambia la soluzione ottima.

Risposta 5. Per un valore di $c = 1000$ €/mese-uomo la quantità ottimale z_2 di manodopera da impiegare sarebbe pari a circa 6,51 mesi-uomo ogni mese (cioè sei persone a tempo pieno e una a tempo parziale).