

## Stiamo Stretti

L'azienda Siamo Stretti srl deve pianificare gli acquisti e la produzione per il prossimo mese (considerato di quattro settimane). Le materie prime sono quattro, identificate da A, B, C e D. Possono essere acquistate in qualsiasi quantitativo ma solo all'inizio di ogni settimana. I prezzi delle materie prime si prevede aumenteranno a breve. Il responsabile dell'ufficio rifornimenti è quindi convinto che sia opportuno comprare il maggior quantitativo possibile di materie prime al più presto. Il problema principale dell'azienda è che dispone di un solo magazzino nel quale deve conservare sia le materie prime in attesa di lavorazione sia i prodotti finiti in attesa di essere venduti. Ogni tipo di materia prima e ogni tipo di prodotto hanno un diverso ingombro. L'azienda commercializza sei prodotti, identificati dalle sigle X, Y, Z, W, K, Q. Ciascun prodotto richiede un diverso quantitativo di materie prime, secondo percentuali date. I costi di lavorazione sono invarianti nel tempo e non dipendono dalla quantità prodotta. Le vendite sono uniformi nel tempo; il ritmo di vendita è costante e noto all'ufficio commerciale dell'azienda. La produzione e le vendite avvengono nei primi 5 giorni di ogni settimana.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file STRETTI.TXT.

Valutare poi (quantitativamente) l'impatto economico per l'azienda di un possibile allargamento del magazzino. Si vuole sapere qual è il limite massimo di capacità utilizzabile del magazzino. Il proprietario di un identico magazzino adiacente è disposto a concederne l'uso all'azienda per il prossimo mese al prezzo di 1000 euro. Valutare se sia conveniente o no accettare l'offerta.

### Esempio.

	1	2	3	4
A	18	24	30	41
B	40	50	65	80
C	23	27	34	44
D	12	19	28	39

Tabella 1: Prezzo di acquisto delle materie prime [righe = materie prime; colonne = settimane] espressi in euro per unità di prodotto.

Capacità del magazzino: 60000 metri cubi.

Prodotto	Quantità
X	11
Y	4
Z	18
W	7
K	3
Q	12

Tabella 2: Minime quantità da vendere ogni giorno espresse in unità di prodotto.

	A	B	C	D
X	15	25	40	20
Y	25	40	15	20
Z	40	20	20	20
W	25	25	25	25
K	5	50	40	5
Q	50	5	5	40

Tabella 3: Composizione percentuale di ogni prodotto.

Materia prima	Volume
A	120
B	130
C	200
D	180

Tabella 4: Magazzino: volume occupato per unità di materia prima [metri cubi].

Prodotto	Volume
X	80
Y	90
Z	105
W	120
K	125
Q	100

Tabella 5: Magazzino: volume occupato per unità di prodotto [metri cubi].

### Soluzione.

*Dati.* Indichiamo con  $S$  l'insieme indicizzato delle settimane, con  $P$  l'insieme dei prodotti e con  $M$  l'insieme delle materie prime. Indichiamo con  $v_i$  le quantità di ogni prodotto  $i \in P$  richieste quotidianamente dal mercato; con  $d_j$  il volume unitario della materia prima  $j \in M$ , con  $u_i$  il volume unitario del prodotto  $i \in P$ , con  $p_{js}$  il prezzo della materia prima  $j \in P$  nella settimana  $s \in S$ , con  $t_{ji}$  la frazione di prodotto  $i \in P$  formata da materia prima  $j \in M$ , con  $T$  la capacità del magazzino.

*Variabili.* Le variabili del problema sono le quantità  $a_{js}$  di materia prima  $j$  acquistata per ogni settimana  $s$  (nell'esempio ci sono  $4 \times 4 = 16$  variabili) e le quantità  $x_{is}$  di prodotto  $i$  fabbricate nella settimana  $s$  (nell'esempio ci sono  $6 \times 4 = 24$  variabili). Tutte le variabili sono continue e non-negative.

*Vincoli.* Un primo insieme di vincoli impone che le quantità presenti in magazzino non eccedano mai la capacità del magazzino. Il profilo delle scorte complessive ha dei massimi in corrispondenza dei rifornimenti. Quindi il vincolo va imposto sulle quantità presenti in magazzino subito dopo l'arrivo di un rifornimento ad inizio settimana. Tali quantità sono la differenza tra il materiale entrato in magazzino e il materiale uscito dal magazzino fino a quel momento. All'inizio della generica settimana  $s$  il materiale entrato è dato dalle materie prime acquistate nelle settimane precedenti e dai prodotti fabbricati nelle settimane precedenti più il rifornimento iniziale della settimana  $s$ . Il materiale uscito è dato dalle quantità di materia prima trasformate in prodotto nelle settimane precedenti (che dipende dalle variabili  $x$  tramite i coefficienti di composizione di ogni prodotto) e dalle quantità di prodotti vendute nelle settimane precedenti (quantità date).

$$\sum_{k \in S: k \leq s-1} \left( \sum_{i \in P} u_i(x_{ik} - 5v_i) + \sum_{j \in M} d_j a_{jk} - \sum_{i \in P, j \in M} d_j t_{ji} x_{ik} \right) + \sum_{j \in M} d_j a_{js} \leq T \quad \forall s \in S.$$

Un secondo insieme di vincoli lega le variabili  $x$  e le variabili  $a$ , imponendo che la quantità di materia prima acquistata, corrispondente alle variabili  $a$  (sommando tutte le materie prime acquistate dall'inizio fino alla settimana corrente) sia sufficiente a produrre i prodotti corrispondenti alle variabili  $x$  (sommando tutte le produzioni dall'inizio fino alla settimana corrente). Il vincolo va imposto per ogni settimana e per ogni materia prima. Nell'esempio proposto ci sono 16 vincoli di questo tipo.

$$\sum_{k \in S: k \leq s} a_{jk} \geq \sum_{k \in S, i \in P: k \leq s} t_{ji} x_{ik} \quad \forall s \in S, j \in M$$

Un terzo insieme di vincoli impone che le quantità di prodotti fabbricati (sommando dall'inizio fino alla settimana corrente) siano sufficienti a soddisfare

la domanda del mercato (sommando dall'inizio fino alla settimana corrente). Il vincolo va imposto per ogni prodotto e per ogni settimana. Nell'esempio proposto ci sono 24 vincoli di questo tipo.

$$\sum_{k \in S: k \leq s} x_{ik} \geq 5sv_i \quad \forall i \in P, s \in S$$

*Obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è la somma dei costi di acquisto delle materie prime (somma pesata delle variabili  $a$ ).

$$\text{minimize } c = \sum_{j \in M, s \in S} p_{js} a_{js}$$

Il modello risultante è di programmazione lineare.

La soluzione ottima dell'esempio proposto costa circa 32996.5 euro.

*Analisi parametrica.* Per poter eseguire l'analisi parametrica su un unico vincolo, bisogna sostituire il termine noto  $T$  nei vincoli indicati sopra con un'opportuna variabile ausiliaria  $\tau$  e poi imporre un unico ulteriore vincolo

$$\tau \leq T$$

che consente l'analisi parametrica sul dato  $T$  a partire da  $T = 60000$  metri cubi in su.

Dall'analisi parametrica si ricava che la capacità  $T$  può aumentare con gli effetti sull'obiettivo riportati in Tabella 6. Il massimo valore di capacità del magazzino che potrebbe essere utilizzata è pari a 169760 metri cubi.

Il raddoppio della capacità del magazzino porterebbe il termine noto del vincolo di capacità da 60000 a 120000. Risolvendo il modello con il nuovo valore di capacità si osserva che l'obiettivo scenderebbe da circa 32996,50 a circa 25886,12 euro con un risparmio di circa 7110 euro, che è superiore al prezzo di affitto del magazzino. Quindi conviene accettare la proposta.

Capacità [mc]	Costo ridotto	Costo [euro]
60658.47826	0.22186	32850.40036
65510.00000	0.21211	31821.33654
66218.14947	0.21189	31671.28388
66790.39146	0.20024	31556.69587
68459.43060	0.20024	31222.48084
71210.00000	0.20024	30671.69590
72224.87528	0.19976	30468.96882
72749.91404	0.18774	30370.39609
74184.12847	0.15023	30154.93063
75134.27473	0.15023	30012.18790
75574.43582	0.12668	29956.42739
76740.00000	0.12471	29811.06530
78580.00000	0.11447	29600.43428
79118.06939	0.11242	29539.94249
79650.00000	0.11242	29480.14085
82560.00000	0.11242	29152.98768
87100.00000	0.10933	28656.62500
91798.58726	0.10827	28147.88712
92668.04989	0.09773	28062.91497
93969.33518	0.09773	27935.74100
96770.00000	0.08921	27685.90000
96794.30839	0.08670	27683.79252
98982.06349	0.08670	27494.11905
100440.56689	0.08670	27367.67007
104140.00000	0.08670	27046.93750
107915.39683	0.08670	26719.61905
115110.00000	0.08237	26127.00000
115485.36398	0.07268	26099.71839
115582.41935	0.07138	26092.79032
116270.00000	0.04866	26059.33333
118590.00000	0.04866	25946.44444
127320.00000	0.04278	25572.94444
133310.00000	0.03889	25340.00000
134510.00000	0.02000	25316.00000
135110.00000	0.02000	25304.00000
136310.00000	0.02000	25280.00000
136910.00000	0.02000	25268.00000
144110.00000	0.02000	25124.00000
147710.00000	0.02000	25052.00000
169760.00000	0.02000	24611.00000

Tabella 6: Analisi parametrica sulla capacità del magazzino.