

Sinusoide

Un andamento periodico di una grandezza y , misurata in metri, è stato osservato in diversi istanti di tempo, misurati in secondi. Le misure di tempo sono esatte, ma quelle della grandezza y possono essere affette da un errore di misura. Si sa che il numero di cicli completi in 20 secondi è compreso tra 4 e 6. Si vuole trovare l'andamento periodico (sinusoide) che meglio interpola le osservazioni, minimizzando l'errore quadratico medio. Per errore si intende la differenza tra valore calcolato e valore osservato.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati del file `Sinusoide.txt` e discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Soluzione commentata.

Si tratta evidentemente di un problema di interpolazione ottima.

I dati sono un insieme di N coppie (t, y) , dove t è il valore in ascisse e y quello in ordinate.

Per identificare le variabili, bisogna capire quali sono tutti i parametri che determinano la funzione cercata. In generale, una funzione periodica si può esprimere come seno o coseno di un angolo che varia nel tempo. Il testo dell'esercizio suggerisce di usare la funzione seno, ma ovviamente non è sbagliato usare la funzione coseno sfasando l'angolo di 90 gradi.

Poiché l'andamento è periodico, uno dei parametri è certamente il periodo, oppure la frequenza, oppure la pulsazione. Il vincolo descritto nel testo è un vincolo sulla frequenza, che si misura in numero di cicli per unità di tempo. Se si usa una variabile $f \geq 0$ per la frequenza, il vincolo è $\frac{4}{20} \leq f \leq \frac{6}{20}$. Lo stesso vincolo si può esprimere anche in funzione del periodo $T \geq 0$ o della pulsazione $\omega \geq 0$, ricordando che $T = \frac{1}{f}$ e che $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Qualunque delle tre variabili si scelga, si tratta sempre di una variabile continua e non-negativa.

Un altro parametro della funzione è la fase della sinusoide, che indichiamo con ϕ (variabile continua) e che, per evitare soluzioni multiple equivalenti, deve essere vincolata tra 0 e 2π , oppure tra $-\pi$ e π o in qualunque altro intervallo di ampiezza 2π .

Un terzo parametro è l'ampiezza $A \geq 0$, anch'essa continua e non-negativa. Un valore negativo dell'ampiezza può essere interpretato come uno sfasamento di π della sinusoide. Tuttavia, proprio per evitare soluzioni multiple, è decisamente opportuno che l'ampiezza venga vincolata ad essere non-negativa.

Infine, resta da determinare la posizione della sinusoide rispetto all'asse orizzontale: non è detto, infatti, che il suo valor medio sia $y = 0$. Indichiamo il valor medio con b , variabile continua ma libera in segno.

In totale, quindi, l'andamento periodico cercato è descritto da quattro variabili continue.

Può essere comodo introdurre variabili ausiliarie e_i che rappresentino l'errore ad ogni punto $i = 1, \dots, N$. Esse sono definite come differenza tra valore osservato e valore calcolato, cioè

$$e_i = y_i - (A \sin(\omega t_i + \phi) + b) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

L'obiettivo richiede la minimizzazione dell'errore quadratico medio, cioè

$$\text{minimize } z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2.$$

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 \\ \text{subject to } e_i &= y_i - (A \sin(\omega t_i + \phi) + b) && \forall i = 1, \dots, N \\ 2\pi/5 &\leq \omega \leq 3\pi/5 \\ A &\geq 0 \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi \\ b &\text{ free.} \end{aligned}$$

Il modello è di programmazione non-lineare e quindi è importante capire se è convesso o meno.

Immaginando che tre variabili siano fissate, è possibile studiare come si comporta z al variare della quarta.

Rispetto a b il problema è evidentemente convesso. Anche rispetto ad A è convesso, poiché ogni variabile e_i dipende linearmente da A . Rispetto invece a ω e a ϕ non si può dimostrare alcuna proprietà di convessità e, anzi, si intuisce abbastanza facilmente che possono esistere minimi locali.

Analizziamo dapprima la dipendenza da ω (o da f o da T). Consideriamo un esempio, molto più semplice di quello dato, con due soli punti, entrambi con $y = 0$ e a distanza τ e 2τ dall'origine ($N = 2$, $t_1 = \tau$, $y_1 = 0$, $t_2 = 2\tau$, $y_2 = 0$).

Fissiamo A (qualsiasi), $b = 0$ e $\phi = 0$ e facciamo variare T . La soluzione con $T = \tau$ interpola perfettamente, così come quella con $T = 2\tau$, cioè produce $z = 0$. Ma per valori intermedi si avrebbe $z > 0$.

Analogamente si può ragionare per la dipendenza da ϕ , usando lo stesso esempio e fissando $T = 2\tau$. Con $\phi = 0$ si ha interpolazione perfetta, cioè $z = 0$. Lo stesso si ha con $\phi = \pi$ o $\phi = -\pi$. Ma per valori intermedi si ha $z > 0$.

La soluzione calcolata dalla maggior parte dei solutori non-lineari, quindi, può dipendere dall'inizializzazione.

La soluzione ottima (quella da cui è stato costruito l'esercizio) è $A = 8,47...$ (metri), $\omega = 1,82...$ (rad/sec), $\phi = 1,60...$ (radianti) e $b = -2,45...$ (metri), con $z = 0,13$.