

Sentinelle

Per pattugliare la città in piena guerra civile, il comandante della polizia deve disporre delle sentinelle in modo da sorvegliare tutti gli incroci. Poiché le strade sono tutte rettilinee, ogni incrocio può essere sorvegliato anche da una sentinella posta in un incrocio adiacente. Siccome il personale è scarso, il problema deve essere risolto impiegando il minor numero possibile di sentinelle.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio descritto nel seguito.

Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Esempio.

La città ha 30 tra piazze e incroci, collegati dalle vie elencate nella tabella 1. Alcune piazze possono avere una sola via incidente ad esse.

1	2	5	13	11	23	18	19
1	3	6	7	11	29	18	28
1	4	7	9	12	13	19	20
2	30	7	10	12	18	19	28
3	13	8	9	12	19	20	21
3	16	8	12	12	27	20	22
4	5	8	13	13	14	20	29
4	6	8	27	14	15	24	25
4	24	9	10	14	18	24	26
5	6	9	27	15	16	27	29
5	8	10	11	15	17		

Tabella 1: Elenco dei lati del grafo (vie della città).

Soluzione.

Dati. I dati del problema sono i vertici e i lati del grafo che rappresenta le vie della città. Sia V l'insieme indicizzato dei vertici. Sia E l'insieme dei lati (coppie ordinate di vertici).

Variabili. Le variabili binarie x_i rappresentano la scelta di mettere una sentinella nel vertice $i \in V$.

Vincoli. I vincoli devono imporre che ogni incrocio sia sorvegliato almeno una volta o da una sentinella posta in esso o da una sentinella posta in un incrocio adiacente.

$$\sum_{j \in V: [i, j] \in E} x_j + x_i \geq 1 \quad \forall i \in V.$$

Si noti che se la sintassi del linguaggio di modellizzazione (es. AMPL, MathProg) prevede che E sia un insieme di coppie ordinate (cioè archi), il test sull'indice nella sommatoria va scritto considerando i due casi distinti di orientamento degli archi:

$$(i, j) \in E \vee (j, i) \in E.$$

Obiettivo. L'obiettivo consiste nel minimizzare il numero di sentinelle, cioè di vertici selezionati.

$$\text{minimize } z = \sum_{i \in V} x_i.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare intera con variabili binarie. Si tratta del problema denominato *Minimum Dominating Set* ed è *NP-hard*.

La soluzione ottima consiste nell'utilizzare 7 sentinelle.