

Sabotaggio.

Durante un conflitto armato un reparto logistico deve cercare di approvvigionare le linee di combattimento. La rete logistica è descritta da una rete di flusso, lungo i cui archi vengono spediti i rifornimenti. Gli archi hanno una capacità limitata e nota. L'obiettivo è di trasportare la massima quantità possibile di rifornimenti da alcuni nodi-origine ad alcuni nodi-destinazione dati.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel file SABOTAGGIO .TXT. Discutere ottimalità e unicità delle soluzioni ottenute.

Un reparto guastatori dell'esercito nemico vuole compiere azioni di sabotaggio per minimizzare il flusso massimo di rifornimenti. Esso decide di indirizzare l'azione di sabotaggio verso l'arco che nella soluzione ottima calcolata in precedenza trasporta la massima quantità di flusso.

Si supponga che l'azione di sabotaggio di questo arco-bersaglio possa essere dimensionata in modo variabile. Dopo aver identificato l'arco-bersaglio, valutare gli effetti del sabotaggio (variazione del flusso massimo trasportato dalle origini alle destinazioni) a seconda della quantità di capacità sottratta all'arco.

Infine, si assuma che il sabotaggio abbia un costo crescente con la quantità di capacità sottratta all'arco e si considerino i due obiettivi conflittuali: minimizzazione del costo del sabotaggio e massimizzazione dell'effetto del sabotaggio. Indicare il punto-utopia e trovare la soluzione Paretiana più vicina al punto-utopia nello spazio degli obiettivi tra tutte quelle che provocano una diminuzione strettamente positiva del flusso massimo.

Dati.

La rete di flusso è descritta dal seguente elenco di archi con relativa capacità (espressa in tonnellate al giorno). Le origini sono nei nodi che non hanno archi entranti e le destinazioni nei nodi che non hanno archi uscenti.

Arco	Capacità
(1, 3)	58
(2, 4)	31
(3, 4)	40
(3, 5)	12
(4, 6)	66
(5, 7)	59
(6, 5)	25
(6, 8)	36

Tabella 1: Archi e capacità.

Soluzione commentata.

Dati. È dato un grafo orientato, descritto da un insieme indicizzato di nodi $N = 1, \dots, 8$ ed un insieme di archi $A \subset N \times N$. Per ogni arco $(i, j) \in A$ è nota la capacità c_{ij} . E' dato un insieme di origini $O \subseteq N$ senza archi entranti ed un insieme di destinazioni $D \subseteq N$ senza archi uscenti. Dall'esame del grafo nell'esempio si desume che $O = \{1, 2\}$ e $D = \{7, 8\}$.

Variabili. Il problema richiede anzitutto di trovare il massimo flusso dai nodi origine ai nodi destinazione. Esso richiede quindi di associare ad ogni arco $(i, j) \in A$ una variabile continua non-negativa x_{ij} , che indica la quantità di flusso lungo l'arco.

Obiettivo. L'obiettivo è massimizzare il flusso che può raggiungere le destinazioni.

$$\text{maximize } z = \sum_{(i,j) \in A: j \in D} x_{ij}.$$

Vincoli. Come in tutti i problemi di flusso su rete, i vincoli impongono la conservazione del flusso nei nodi intermedi e il rispetto delle capacità degli archi.

$$\sum_{i \in N: (i,j) \in A} x_{ij} = \sum_{i \in N: (j,i) \in A} x_{ij} \quad \forall j \in N \setminus (O \cup D)$$

$$x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in A.$$

Il modello matematico risultante è un modello di PL. La soluzione calcolata dai solutori è quindi garantita essere ottima.

Dall'esame dei costi ridotti, si nota che la soluzione ottima non è unica. Infatti, esistono alcune variabili fuori base con costo ridotto nullo.

Per indirizzare l'azione di sabotaggio in modo ottimale, l'arco-bersaglio è l'arco $(4, 6)$ che all'ottimo trasporta 61 unità di flusso. Nello spazio degli obiettivi la spezzata calcolata dall'analisi parametrica sul vincolo di capacità dell'arco-bersaglio è fatta da due segmenti:

- un segmento orizzontale dal punto con capacità 66 e flusso massimo 73 al punto con capacità 61 e flusso massimo 73. Lungo questo segmento l'arco ha capacità in eccesso e la sua variabile di slack è in base.
- un segmento a 45 gradi dal punto con capacità 61 e flusso massimo 73 al punto con capacità 0 e flusso massimo 12. Lungo questo segmento l'arco è saturo, la sua variabile di slack è fuori base ed il flusso massimo diminuisce di un'unità per ogni unità di capacità sottratta all'arco.

Il punto utopia, nello spazio degli obiettivi, ha come valore di capacità 66, cioè l'intera capacità dell'arco-bersaglio (minimo costo, nessun sabotaggio) e come valore di massimo flusso 12, cioè il massimo flusso che si ottiene quando la capacità dell'arco $(4, 6)$ viene azzerata (massimo effetto ottenibile dal sabotaggio).

È richiesto di considerare solo le soluzioni paretiane che corrispondono ad una diminuzione strettamente positiva del flusso massimo, cioè solo i punti lungo il segmento diagonale della spezzata calcolata tramite l'analisi parametrica. Il punto paretiano più vicino al punto-utopia si trova conducendo dal punto-utopia la perpendicolare al segmento diagonale della regione paretiana. Esso ha coordinate 33 per la capacità e 45 per il flusso massimo.