

Ricariche. All'autista di un furgone elettrico è stato assegnato un itinerario per prelevare e consegnare merce presso alcuni clienti di un'azienda. Poiché l'itinerario è lungo e la batteria del furgone ha una capacità limitata, sono state previste alcune soste presso piazzole dotate di colonnine di ricarica. Il prezzo dell'energia non è lo stesso in tutte le colonnine ed anche la velocità di ricarica è in generale diversa perché diversa è la tecnologia adottata nelle piazzole. Per ogni tratto dell'itinerario tra una piazzola e l'altra sono note le stime del tempo di percorrenza, che include anche le soste presso i clienti, e del consumo di energia. È dato un limite superiore alla durata del viaggio.

L'autista vuole pianificare le ricariche in modo da minimizzare il loro costo complessivo.

1. Formulare il problema, classificarlo e risolverlo, discutendo ottimalità e unicità della soluzione.
2. Se non esistesse il vincolo sulla durata, quale sarebbe la soluzione di costo minimo e quale sarebbe la corrispondente durata del viaggio?
3. Viceversa, qual è la soluzione che minimizza il tempo del viaggio e qual è il suo costo?
4. Calcolare la regione paretiana del problema a due obiettivi (minimizzare il tempo e minimizzare il costo).
5. Assumendo come valori standard il costo del viaggio di minima durata e la durata del viaggio di minimo costo, determinare la soluzione paretiana che nello spazio degli obiettivi giace sul segmento che unisce il punto che ha come coordinate i valori standard con il punto utopia.

Soluzione. Il problema richiede tante variabili, continue e non-negative, quante le operazioni di ricarica. Esse indicano la quantità di energia ricaricata in ogni piazzola. Sia x_i la quantità di energia ricaricata nella piazzola $i = 1, \dots, T$, con $T = 5$ in questo caso. Per comodità si possono utilizzare variabili ausiliarie y_i e z_i , che indicano il livello di carica della batteria all'inizio e alla fine di ogni tratto $i = 1, \dots, T$. Le variabili sono collegate tra loro da vincoli di uguaglianza:

$$y_i = x_i + z_{i-1} \quad \forall i > 1$$

$$y_1 = x_1$$

e inoltre

$$z_i = y_i - c_i,$$

dove il dato c_i indica il consumo stimato lungo il tratto $i = 1, \dots, T$. Tali vincoli sono caratteristici dei problemi di flusso su rete.

Occorre poi imporre i vincoli $z_i \geq 0$ e $y_i \leq B$, per avere un livello di carica della batteria che sia sempre compreso tra 0 e la capacità B della batteria.

La durata del viaggio, indicata da Δ è data dalla somma dei tempi di ricarica e da un termine fisso:

$$\Delta = \sum_{i=1}^T (\tau_i x_i + t_i)$$

dove τ_i è il tempo unitario di ricarica alla piazzola i e t_i è il tempo di percorrenza del tratto i .

Il costo del viaggio, indicato da W è dato dalla somma dei costi di ricarica alle piazzole:

$$W = \sum_{i=1}^T \gamma_i x_i$$

dove γ_i è il costo unitario di ricarica alla piazzola i .

1. Il problema è di programmazione lineare. La soluzione fornita dai solutori software è garantita essere ottima. Dall'analisi dei costi ridotti, tutti diversi da zero, si ricava che essa è anche unica.
2. Senza il vincolo sulla massima durata, il costo migliora, scendendo da 75000 a 74500. In tal caso la durata del viaggio è pari a 78000 unità di tempo.
3. Il viaggio di minima durata invece ha un costo pari a 76500 e una durata pari a 77200 (esistono anche altre soluzioni con costo più alto e uguale durata, ma non sono paretiane).
4. L'analisi parametrica rivela che non c'è nessun'altra soluzione di base tra questi due estremi: la regione paretiana è costituita solo dal segmento che unisce queste due soluzioni.
5. Le coordinate (Δ, W) del punto-utopia sono $(77200, 74500)$ mentre la coppia dei valori standard, per come sono definiti nel testo, è $(78000, 76500)$. Il punto richiesto si trova quindi all'intersezione delle due diagonali di un rettangolo nello spazio degli obiettivi, cioè nel punto di coordinate $(77600, 75500)$.