

**Ricariche.**

Un veicolo elettrico deve percorrere un dato tragitto, visitando alcune tappe in una sequenza già data. Alcune di queste tappe sono stazioni di ricarica della batteria. Ogni stazione, in generale, ha un proprio tempo unitario di ricarica ed un proprio costo unitario di ricarica. Sono noti i consumi di energia lungo ogni arco del cammino. Ad ogni stazione il veicolo può ricaricare qualunque quantità di energia. L'energia accumulata nella batteria del veicolo non può mai eccedere una data capacità massima.

Poiché a tempi unitari di ricarica inferiori corrispondono anche costi unitari di ricarica maggiori, si pone un problema a due obiettivi in conflitto tra loro: minimizzare il tempo totale di ricarica (il tempo totale di viaggio è indipendente dalle ricariche) e minimizzare il costo totale di ricarica.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file RICARICHE.TXT, assumendo che il tempo di ricarica sia una funzione lineare della quantità di energia ricaricata (con coefficiente di proporzionalità diverso in ogni stazione).

Ripetere il procedimento nell'ipotesi che il legame tra energia ricaricata e tempo di ricarica sia non-lineare con  $T(q) = (\rho/B)q^2$ , dove  $T(q)$  indica il tempo necessario per ricaricare la batteria vuota fino al livello di carica  $q$ ,  $B$  indica la capacità della batteria e  $\rho$  indica il tempo unitario di ricarica del caso lineare (diverso da stazione a stazione, in generale). In questa variante non si chiede di determinare l'intera regione Pareto-ottima, ma di determinare la soluzione Pareto-ottima per la quale il rapporto tra costo e tempo è lo stesso che si ha nel punto-utopia.

**Dati.**

Stazioni	Costi unitari	Tempi unitari
1	0	0
2	20	4
3	15	6
4	20	4
5	16	6

Tabella 1: Costi e tempi unitari di ricarica nelle stazioni.

Archi	Consumi
1-2	8
2-3	7
3-4	5
4-5	9
5-6	6

Tabella 2: Consumi di energia lungo gli archi del tragitto.

Capacità della batteria: 10.

**Soluzione.***Dati.*

Si noti anzitutto che le ricariche avvengono in tutte le stazioni tranne l'ultima, che deve solo essere raggiunta. Per questo nell'esempio non sono dati i tempi e i costi di ricarica nella stazione 6.

Sia quindi  $S = 1, \dots, s$  l'insieme degli indici delle stazioni, trascurando l'ultima (nell'esempio,  $s = 5$ ). Sia  $\rho_i$  il tempo unitario di ricarica nella stazione  $i \in S$ . Sia  $\gamma_i$  il costo unitario di ricarica nella stazione  $i \in S$ .

Dato che il percorso è un cammino, non serve identificare gli archi con coppie di indici come si farebbe su un grafo generico. Assegnando l'indice  $i$  all'arco dalla stazione  $i$  alla stazione  $i + 1$ , indichiamo con  $c_i$  il consumo lungo l'arco  $i \in S$ .

Sia  $B$  la capacità della batteria.

Le unità di misura non sono specificate. Assumiamo che siano tutte coerenti tra loro.

*Variabili.*

Sia  $\delta_i$ , continua e non-negativa, la quantità di energia ricaricata nella stazione  $i \in S$ . Per comodità, introduciamo le variabili ausiliarie  $a_i$  e  $b_i$  che indicano il livello di carica della batteria rispettivamente all'inizio e alla fine dell'arco  $i \in S$ .

Il problema si può formulare anche con meno variabili (le variabili  $\delta$  sono sufficienti a determinare univocamente la soluzione), ma per imporre i vincoli risulta comodo inserire anche le variabili  $a$  e  $b$ .

*Vincoli.*

Conservazione dell'energia in ogni stazione:

$$a_i = b_{i-1} + \delta_i \quad \forall i = 2, \dots, s.$$

Inizializzazione:

$$a_1 = \delta_1.$$

Consumo lungo gli archi:

$$b_i = a_i - c_i \quad \forall i \in S.$$

Limiti sulla batteria:

$$b_i \geq 0 \quad \forall i \in S.$$

$$a_i \leq B \quad \forall i \in S.$$

*Obiettivi.*

Gli obiettivi sono due: il costo complessivo delle ricariche

$$z = \sum_{i \in S} \gamma_i \delta_i$$

ed il tempo complessivo delle ricariche

$$t = \sum_{i \in S} \rho_i \delta_i.$$

Il modello risultante è di PL a due obiettivi. La regione Pareto-ottima può essere ricavata con l'analisi parametrica su una delle due funzioni-obiettivo trasformata in vincolo: ad esempio, ponendo

$$\sum_{i \in S} \rho_i \delta_i \leq \tau$$

al posto del secondo obiettivo e facendo poi variare il termine noto  $\tau$ .

Ottimizzando  $z$  senza vincoli sul tempo si ottiene  $z^* = 426$  e  $t = 132$ , con ricariche pari a  $\delta = [10 \ 5 \ 10 \ 4 \ 6]^T$ . Riducendo man mano il valore di  $\tau$  per rendere inammissibile l'ultima soluzione trovata, l'analisi parametrica fornisce i punti di discontinuità indicati nella tabella.

La soluzione Pareto-ottima indicata tra parentesi corrisponde ad un cambio di base ma la pendenza della regione Pareto-ottima in quel punto non cambia.

Nella seconda versione del problema, quando il tempo di ricarica è una funzione non-lineare della quantità di energia ricaricata, il modello diventa ovviamente un modello di PNL.

$z$	$t$
426	132
430	130
(455	120)
470	114

Tabella 3: Punti di discontinuità della regione Pareto-ottima.

L'unico cambiamento da apportare riguarda il calcolo del tempo totale, che diventa

$$t = \sum_{i \in S} \rho_i / B(a_i^2 - b_{i-1}^2),$$

con  $b_0 = 0$ . Si noti che con la definizione data del tempo di ricarica  $(\rho_i/B)q_i^2$ , se la batteria è inizialmente vuota e viene ricaricata completamente (cioè  $a_i = B$  e  $b_{i-1} = 0$ ), il tempo di ricarica risulta lo stesso del caso lineare. Se invece la ricarica è parziale, il tempo per passare da un livello  $b$  ad un livello  $a$  è dato dalla differenza tra il tempo di ricarica da 0 ad  $a$  ed il tempo di ricarica da 0 a  $b$ , cioè  $(\rho_i/B)(a^2 - b^2)$ .

Con questa nuova espressione del secondo obiettivo, si può ripetere il procedimento per ricavare la regione Pareto-ottima. Stavolta però il solutore non fornisce i dati necessari all'analisi parametrica, dato che il modello è non-lineare. Per questo motivo il testo dell'esercizio non richiede la regione Pareto-ottima, bensì la soluzione nella quale il rapporto tra tempo e costo sia lo stesso del punto-utopia.

La soluzione di minimo costo senza vincoli sul tempo ha valore  $z^* = 426$  con  $t = 122$ , come nel caso lineare. La soluzione di minimo tempo senza vincoli sul costo ha valore  $t^* = 87$  con  $z = 451$ , con ricariche  $\delta = [10 \ 5 \ 5 \ 9 \ 6]^T$ . Il punto-utopia ha quindi un rapporto tra costi e tempi pari a  $\frac{426}{87}$ . Imponendo il vincolo  $z/t = 426/87$  (linearizzato in  $87z = 426t$ ), e ottimizzando uno dei due obiettivi, si ottiene la soluzione Pareto-ottima  $\delta = [10 \ 5 \ 5.71271 \ 8.28729 \ 6]^T$  con costo di ricarica  $z = 447.436$  e tempo di ricarica  $t = 91.3779$ .

La soluzione ottima è sicuramente unica, poiché è l'intersezione tra la regione Pareto-ottima ed una retta passante per l'origine e per il punto-utopia. Tale retta ha coefficiente angolare positivo e quindi può contenere un solo punto Pareto-ottimo. Infatti, per qualsiasi coppia di punti distinti sulla retta, quello più lontano dall'origine è dominato da quello più vicino.