Produzione

Un'azienda, che produce due prodotti, deve pianificare la propria attività per il prossimo anno. I due prodotti vengono venduti durante l'arco dell?anno in quantità diverse. L'ufficio vendite ha stimato quale sarà la domanda di prodotto per ogni mese dell'anno che deve essere pianificato. Il reparto produzione ha calcolato quali saranno i costi di produzione per ciascuno dei due prodotti in ogni mese dell'anno. Tali costi infatti subiscono delle fluttuazioni di mese in mese. Inoltre il reparto produttivo ha anche comunicato quale sarà la massima capacità produttiva prevista per ogni mese dell'anno e per ogni prodotto. L'azienda ha anche un magazzino, per stoccare l'eventuale produzione in eccesso. Il reparto magazzino ha comunicato i costi previsti per lo stoccaggio di ogni unità dei prodotti per ogni mese dell'anno. E' nota inoltre la capacità del magazzino, ossia il massimo numero complessivo di unità di prodotto che esso può contenere.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio riportato nel seguito. Discutere l'unicità e l'ottimalità della soluzione ottenuta.

Di quanto potrebbe diminuire la capacità del magazzino senza provocare problemi?

Esempio.

I prodotti sono 2, denominati X e Y.

Mese	X	Y
Gennaio	125	240
Febbraio	140	245
Marzo	140	230
Aprile	150	230
Maggio	130	225
Giugno	120	220
Luglio	100	215
Agosto	170	240
Settembre	135	225
Ottobre	145	235
Novembre	160	240
Dicembre	175	250

Table 1: Costi unitari di produzione in ogni mese [€/unità di prodotto]

Mese	Costo
Gennaio	45
Febbraio	45
Marzo	40
Aprile	25
Maggio	20
Giugno	10
Luglio	10
Agosto	10
Settembre	15
Ottobre	25
Novembre	35
Dicembre	40

Table 2: Costi unitari di stoccaggio in ogni mese [€/unità di prodotto]

La capacità del magazzino è pari a 2500 unità di prodotto.

Soluzione.

Il problema richiede di determinare le quantità di produzione per ogni prodotto e per ogni mese. Occorrono quindi 2 x 12 = 24 variabili continue e non-negative. Le indichiamo con $x(p, m)$ per ogni prodotto $p = 1, 2$ e ogni mese $m = 1..12$. Inoltre esistono delle quantità di prodotto invenduto (prodotto in anticipo) che vengono stoccate in magazzino al termine di ogni mese. Le indichiamo analogamente con $s(p, m)$. Il modello risulta quindi avere 48 variabili continue e non-negative.

Mese	X	Y
Gennaio	2400	1000
Febbraio	2300	900
Marzo	2500	1000
Aprile	2500	1000
Maggio	2450	1000
Giugno	2550	1000
Luglio	2300	900
Agosto	1200	400
Settembre	2200	1000
Ottobre	2500	1000
Novembre	2500	1000
Dicembre	1800	700

Table 3: Capacità di prodotto in ogni mese [unità di prodotto]

Mese	X	Y
Gennaio	1800	500
Febbraio	1700	400
Marzo	1800	500
Aprile	1800	600
Maggio	1900	700
Giugno	2300	800
Luglio	2500	900
Agosto	2500	1000
Settembre	2000	800
Ottobre	1800	800
Novembre	1700	800
Dicembre	2000	1000

Table 4: Domanda in ogni mese per ogni prodotto [unità di prodotto].

La relazione tra le variabili x e le variabili s è data dai vincoli di conservazione dei prodotti. Detta $d(p, m)$ la domanda di prodotto p per il mese m:

$$s(p, m-1) + x(p, m) = d(p, m) + s(p, m) \quad \forall p = 1, 2\ \forall m = 2...12$$

Il vincolo non si può scrivere in questa forma nel mese 1, poiché la scorta nel mese precedente non corrisponde ad alcuna variabile. Supponendo che le scorte iniziali siano nulle, il vincolo per il mese 1 è semplicemente:

$$x(p, m) = d(p, m) + s(p, m) \quad \forall p = 1, 2.$$

Le condizioni di non-negatività sulle variabili s implicano che la domanda sia soddisfatta per ogni prodotto ed in ogni mese.

Gli altri vincoli del problema impongono il rispetto della capacità del magazzino. Pertanto in ogni mese lo stock complessivo di prodotti non deve eccedere il massimo consentito, indicato da Q.

$$s(1, m) + s(2, m) \leq Q \quad \forall m = 1...12.$$

Per rispondere all'ultima domanda nel testo, è necessario fare l'analisi parametrica sul termine noto del vincolo di capacità, indicato da Q. A questo scopo può anche essere utile rendere variabile il parametro Q e poi risolvere un problema di minimizzazione di Q.

L'obiettivo descritto nel testo è la minimizzazione dei costi, che sono dati dalla somma dei costi di produzione e dei costi di stoccaggio. Si tratta quindi di una somma di 48 termini, tanti quante le variabili.

Il modello risultante è di programmazione lineare.

Nella soluzione ottima nessun variabile fuori-base ha costo ridotto nullo. Quindi la soluzione ottime è unica.

L’analisi parametrica mostra che la capacità del magazzino può scendere fino a 2100 unità senza variazioni né nella base ottima né nella soluzione ottima né nel valore ottimo. Al di sotto di questo limite il problema non ammette più soluzione.