Il numero esatto (da “La Settimana Enigmistica” n.3945 del 3 Novembre 2007. Quesito n. 45117: prova d’intelligenza)

Si tratta di determinare esattamente un certo numero basandosi soltanto sul ragionamento, ossia senza alcun ricorso alla matematica *(invece al ricercatore operativo si richiede di formularlo matematicamente nel caso generale e risolverlo senza alcun ricorso al ragionamento basato sui dati del caso singolo)*. Esso è formato da dieci cifre tutte diverse tra loro, e quindi da 0 a 9. Con quelle stesse cifre sono stati formati i seguenti altri quattro numeri, contraddistinti dalle lettere A, B, C e D:

A) 2 4 5 3 1 6 9 0 8 7
B) 6 8 7 1 2 0 9 4 3 5
C) 3 0 9 2 1 8 4 5 7 6
D) 2 4 1 3 0 8 9 5 7 6

Su questi quattro numeri si hanno i seguenti dati, tutti riferiti al numero esatto da trovare: in A ci sono due cifre in posizione errata; in B ce ne sono due in posizione esatta; in C un’unica cifra è in posizione esatta; in D sei sono in posizione errata. Qual è il numero esatto? *Non vi viene data la soluzione a pagina 46...!*

Scrivere un modello matematico del problema, classificarlo e risolverlo con i dati indicati sopra.

Il modello matematico. *Dati.* Sono date S sequenze di n simboli ciascuna. Sia N l’insieme degli n simboli e sia P l’insieme delle n posizioni nelle sequenze. Il modo più conveniente di rappresentare le sequenze date consiste nell’utilizzare matrici di assegnamento $n \times n$. I loro elementi sono indicati da $M_{s,c,p}$ per ogni data sequenza $s \in S$, simbolo $c \in C$ e posizione $p \in P$. Sono dati inoltre i numeri e_s di simboli coincidenti per ogni coppia formata da una sequenza data $s \in S$ e dalla sequenza incognita.

Variabili. Il modello richiede anzitutto n^2 variabili binarie x_{cp} che indicano se nella sequenza incognita il simbolo $c \in C$ è assegnato o no alla posizione p per ogni coppia (c, p).

Vincoli. I vincoli del problema comprendono anzitutto i classici vincoli di assegnamento di ogni cifra ad una sola posizione e di ogni posizione ad una sola cifra:

$$\sum_{c \in C} x_{cp} = 1 \ \ \forall p \in P$$

$$\sum_{p \in P} x_{cp} = 1 \ \ \forall c \in C.$$

Moltiplicando componente per componente ciascuna sequenza data e la sequenza incognita, il totale indica quante componenti sono uguali a 1 nella stessa posizione in entrambe le matrici. Si può quindi esprimere il vincolo come

$$\sum_{c \in C, p \in P} M_{scp} x_{cp} = e_s \quad \forall s \in S.$$

Obiettivo. Il problema ha un’unica soluzione; non c’è alcun obiettivo.

La soluzione corrisponde al numero $2\ 4\ 5\ 3\ 1\ 0\ 9\ 6\ 8\ 7$.