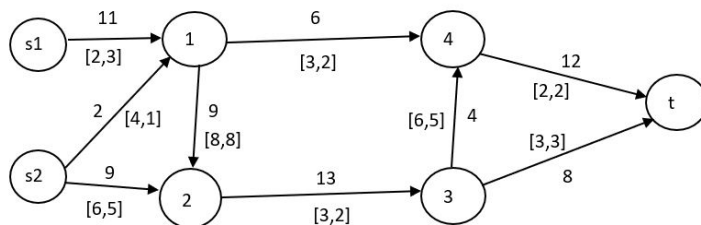


Multi-commodity flow.

In una rete logistica vengono trasportate due diverse tipologie di merce. La rete è composta da hub, collegati tra loro su gomma o via nave (v. figura). Di ogni collegamento tra due hub è nota la quantità massima trasportabile complessivamente tra di essi in ogni mese (pesi associati agli archi in figura). I costi unitari di trasporto sono in generale diversi per le due tipologie di merce su ogni tratta (indicati tra parentesi quadre per ogni tratta). Le merci hanno origine da due stabilimenti e confluiscono in un unico hub di destinazione.



Si vuole studiare quale sia il massimo flusso di merce complessiva che può essere trasportata mensilmente dalle origini alla destinazione. Si vuole quindi trovare il mix ottimale delle due tipologie che consenta di minimizzare i costi di trasporto complessivi.

Scrivere il modello matematico del problema, classificarlo e risolverlo con i dati riportati sotto. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Si vuole presentare un progetto per richiedere un finanziamento pubblico per aumentare la capacità di una tratta (una sola) della rete, aumentando la frequenza dei viaggi tra i due hub corrispondenti. Determinare quali sarebbero le tratte sulle quali avrebbe senso effettuare l'investimento e di quanto avrebbe senso aumentare la capacità della tratta prescelta.

	c_1	c_2	u
$(s1, 1)$	2	3	11
$(s2, 1)$	4	1	2
$(s2, 2)$	6	5	9
$(1, 2)$	8	8	9
$(1, 4)$	3	2	6
$(2, 3)$	3	2	13
$(3, 4)$	6	5	4
$(3, t)$	3	3	8
$(4, t)$	2	2	12

Table 1: Costi unitari delle merci c_1 e c_2 e capacità u per ogni arco.

Soluzione.

	Merce 1	Merce 2
$s1$	6	5
$s2$	4	7

Table 2: Quantità di merce disponibili da ogni origine.

Si tratta di un problema di flusso multi-commodity su un grafo orientato.
I dati sono:

- il grafo orientato $D = (N, A)$ con un set di origini $O \subset N$;
- l'insieme delle merci T ;
- le capacità u_{ij} per ogni arco del grafo $(i, j) \in A$;
- i costi unitari c_{ijt} per ogni arco del grafo $(i, j) \in A$ ed ogni tipo di merce $t \in T$;
- le massime quantità q_{it} disponibili in ogni origine $i \in O$ e ogni tipo di merce $t \in T$.

Le variabili x_{ijt} , continue e non-negative, rappresentano le quantità di flusso di ogni tipo di commodity (merce) $t \in T$ su ogni arco (i, j) del grafo.

I vincoli impongono la conservazione del flusso per ogni commodity e per ogni nodo diverso dalle origini e dalla destinazione.

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ijt} = \sum_{(j,i) \in A} x_{jit} \quad \forall i \notin \{s1, s2, t\}.$$

Inoltre, ci sono vincoli sulla massima quantità in uscita da ogni origine per ogni commodity.

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ijt} \leq q_{it} \quad \forall t \in T, \forall i \in O.$$

Infine, ci sono vincoli di capacità su ogni arco, che vanno imposti sul flusso totale, cioè sulla somma dei flussi relativi alle singole commodities.

$$\sum_{t \in T} x_{ijt} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A.$$

Sono dati due obiettivi. Il primo consiste nel massimizzare il flusso complessivo, che si può esprimere come flusso totale entrante nel nodo di destinazione o uscente dai nodi di origine.

$$\text{maximize } z_1 = \sum_{i \in O} \sum_{t \in T} x_{ijt}.$$

Il secondo obiettivo dipende anche dai costi unitari di trasporto e richiede di minimizzare il costo complessivo senza peggiorare il flusso totale. Va quindi

ottimizzato dopo aver introdotto un opportuno vincolo ulteriore che impone che il flusso totale rimanga pari a quello massimo calcolato in precedenza.

$$\text{maximize } z_2 = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t \in T} c_{ijt} x_{ijt}$$

$$\sum_{i \in O} \sum_{t \in T} x_{ijt} \geq z_1^*$$

Il modello risultante è di Programmazione Lineare. Quindi la soluzione che si ottiene è garantita essere ottima.

Le tratte che limitano il massimo flusso sono quelle che corrispondono agli archi che definiscono il taglio di minima capacità nel grafo tra quelli che separano le origini dalla destinazione. Tali archi, tutti saturi, sono gli archi $(1, 4)$, $(3, 4)$ e $(3, t)$. Se la capacità di $(3, 4)$ o $(3, t)$ aumentasse di 1 unità il flusso massimo aumenterebbe da 18 a 19 ma non oltre, poiché si saturerebbe un altro taglio: $(1, 4)$ e $(2, 3)$. Se invece aumentasse la capacità dell'arco $(1, 4)$, il flusso massimo aumenterebbe fino a 20, quando si saturerebbe il taglio formato da $(3, t)$ e $(4, t)$.