

Merendine

La produzione di un'azienda dolciaria richiede di essere ottimizzata. Il direttore delle vendite vuole sapere quanto la produzione attuale si discosta da quella ottima e quali margini di miglioramento potrebbero essere ottenuti con l'adozione di opportune tecniche di ricerca operativa. Egli deve pianificare la produzione di un certo numero di prodotti, che vengono ottenuti miscelando ingredienti in proporzioni date. Le quantità di ingredienti rifornite sono note e così anche i prezzi di vendita dei dolci. La produzione tuttavia deve rispettare un insieme di vincoli sulle proporzioni tra prodotti di vari tipi. Inoltre alcuni dolci vengono venduti in confezioni grandi e altri in confezioni piccole. Il prezzo di vendita non cambia ma il reparto imballaggio deve essere ottimizzato in modo da produrre la quantità giusta di confezioni piccole e grandi.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati e le specifiche contenuti nel file `MERENDINE.TXT`. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Determinare fino a punto potrebbe diminuire la quantità disponibile di zucchero e che impatto avrebbe tale diminuzione sul ricavo dell'azienda.

Esempio.

Prodotti: merendine, brioches, biscotti normali, biscotti speciali, tortine.

Ingredienti: pasta, zucchero, marmellata, cioccolato e acqua.

Prodotto	Prezzo
Merendine	8
Brioches	6
Biscotti	12
Biscotti++	14
Tortine	10

Tabella 1: Prezzi di vendita dei prodotti (euro al chilogrammo).

Vincoli sulle proporzioni:

- La produzione di biscotti speciali deve essere compresa tra il 20% e il 35% della produzione di biscotti normali.
- Gli avanzati di zucchero, marmellata e cioccolato non devono eccedere il 10% delle quantità disponibili.
- Il totale di prodotti venduti in confezioni grandi deve essere compreso tra il 40% e il 60% del totale. Il vincolo deve essere rispettato sia per ogni tipo di prodotto sia complessivamente.

	Merendine	Brioche	Biscotti	Biscotti++	Tortine
Pasta	20	40	70	25	20
Zucchero	25	15	10	20	30
Marmell.	40	30	0	10	10
Ciocol.	10	0	15	40	30
Acqua	5	15	5	5	10

Tabella 2: Composizione percentuale dei prodotti.

Ingrediente	Quantità
Pasta	illimitata
Zucchero	300
Marmellata	320
Cioccolato	240
Acqua	illimitata

Tabella 3: Quantità di ingredienti disponibili [kg/giorno]

- Ciascun tipo di prodotto deve costituire almeno il 10% della produzione totale.

Confezione	Merendine	Brioche	Biscotti	Biscotti++	Tortine
Piccola	250	60	180	60	70
Grande	350	90	250	90	90

Tabella 4: Produzione attuale (kg/giorno).

Soluzione.

Dati. Indichiamo con P l'insieme dei prodotti e con I quello degli ingredienti. Pasta e acqua non danno luogo a vincoli; quindi non è necessario inserirli nell'insieme I . Indichiamo con a_{ip} la percentuale di prodotto $p \in P$ composta dall'ingrediente $i \in I$. Indichiamo con b_i la disponibilità giornaliera di ingrediente $i \in I$, espressa in chilogrammi. Indichiamo con c_p il prezzo di vendita di ogni prodotto $p \in P$, espresso in euro per chilogrammo. Indichiamo con J l'insieme delle possibili confezioni.

Variabili. Le variabili del problema $x_{pj} \geq 0$ rappresentano la produzione giornaliera di ogni prodotto $p \in P$ per ogni tipo di confezione $j \in J$ e sono espresse in chilogrammi. Per comodità è utile anche inserire variabili $y_i \geq 0$, che indicano la quantità totale di ingredienti effettivamente utilizzati giornalmente, espresse in chilogrammi. Tutte le variabili sono continue e non-negative.

Obiettivo. La funzione obiettivo da massimizzare è il valore complessivo dei prodotti realizzati ogni giorno, espresso in euro.

$$\text{maximize } z = \sum_{p \in P, j \in J} c_p x_{pj}.$$

Vincoli. Per legare le variabili ausiliarie y alle variabili x , si introducono vincoli di uguaglianza, espressi in chilogrammi:

$$y_i = \sum_{p \in P, j \in J} a_{ip} x_{pj} \quad \forall i \in I.$$

Le variabili y sono limitate superiormente:

$$y_i \leq b_i \quad \forall i \in I.$$

I vincoli sulle proporzioni sono i seguenti.

- La produzione di biscotti speciali (indice 4) deve essere compresa tra il 20% e il 35% della produzione di biscotti normali (indice 3):

$$0,2 \sum_{j \in J} x_{3j} \leq \sum_{j \in J} x_{4j} \leq 0,35 \sum_{j \in J} x_{3j}$$

- Gli avanzanti di zucchero, marmellata e cioccolato non devono eccedere il 10% delle quantità disponibili.

$$y_i \geq 0,9b_i \quad \forall i \in I.$$

- Il totale di prodotti venduti in confezioni grandi (indice $j = 2$) deve essere compreso tra il 40% e il 60% del totale. Imponendo che il vincolo sia rispettato per ogni prodotto, è automaticamente garantito che sia rispettato

anche per la produzione complessiva (e quindi non è necessario inserire alcun vincolo relativo alla produzione complessiva).

$$0,4 \sum_{j \in J} x_{pj} \leq x_{p2} \leq 0,6 \sum_{j \in J} x_{pj} \quad \forall p \in P$$

- Ciascun tipo di prodotto deve costituire almeno il 10% della produzione totale:

$$\sum_{j \in J} x_{pj} \geq 0,1 \sum_{q \in P, j \in J} x_{qj} \quad \forall p \in P.$$

Classificazione. Il problema è una variante del classico problema del mix produttivo ottimale. Il modello è di programmazione lineare (file **MERENDINE1.MOD**). Quindi la soluzione calcolata dai solutori è garantita essere ottima.

Forzando i valori delle variabili x ai valori della produzione attuale, si ottiene $z = 14560$ con un consumo di risorse ammissibile. Lasciando libere le variabili, si ottiene una soluzione ottima di valore $z = 17322.58$ circa (file **MERENDINE1.OUT**). La soluzione ottima non è unica, dal momento che esistono infiniti modi di soddisfare i vincoli sul numero di confezioni grandi e piccole a parità di produzione totale

Analisi post-ottimale. Per eseguire l'analisi parametrica sulla disponibilità di zucchero, occorre osservare che tale dato compare in più di un vincolo nel modello. Per poter eseguire correttamente l'analisi parametrica, occorre quindi sostituire ogni occorrenza di b_1 nel modello con una apposita variabile che indichiamo con α e poi inserire un unico vincolo $\alpha = \epsilon$ sul cui termine noto ϵ fare l'analisi parametrica. L'effetto è comunque quello di porre $b_1 = \alpha = \epsilon$, ma mettendo in evidenza un unico termine noto ϵ (che compare solo una volta nel modello) su cui fare l'analisi parametrica. Dall'analisi parametrica si ricava l'andamento seguente.

ϵ	z
300,00000	17322,58065
289,11628	17101,39535
274,04651	15672,55814
272,40243	15455,61173
268,90885	13568,45981

Tabella 5: Analisi parametrica: z (euro/g) in funzione di $b_1 = \epsilon$ (kg/giorno).

Al di sotto del valore $b_1 = 268.90885$ kg/g il problema diventa inammissibile.