

### Mangimi.

Un'azienda produce diversi tipi di mangimi per animali, miscelando in ciascuno gli stessi ingredienti in diverse porzioni.

Ogni tipo di produzione è collegato con un corrispondente ciclo di distribuzione: i mangimi prodotti, vengono infatti trasferiti direttamente in autocisterne, che li consegnano a destinazione. Le autocisterne vengono riempite secondo un ordine prestabilito e fisso: prima quelle che trasportano mangime di tipo 1, poi quelle che trasportano mangime di tipo 2 e così via. L'ordine è indipendente dalle quantità di mangime prodotto per ogni tipo. Inoltre ogni flotta di autocisterne è disponibile a ricevere il mangime a partire da una certa ora e deve essere pronta per partire entro un dato orario, il che implica che la produzione di ogni tipo di mangime non può iniziare prima né può terminare dopo gli orari limite.

La produzione dei mangimi avviene su diverse linee di miscelazione che lavorano in parallelo, attingendo gli ingredienti da miscelare dallo stesso magazzino e rifornendo di mangime le autocisterne. Le linee non sono identiche e hanno velocità di funzionamento diverse.

L'azienda ha attualmente alcuni problemi nel sincronizzare la produzione con la distribuzione e il direttore vuole capire meglio se il problema esista davvero ed in caso affermativo se sia possibile rimediare e come.

Anche il responsabile del reparto vendite ha dei problemi. Egli sostiene che la produzione così come è adesso era ottimale per massimizzare i profitti dell'azienda (sarà vero?), ma recentemente i prezzi dei mangimi sono cambiati radicalmente in seguito al caso della "mucca pazza", mentre le quantità di ingredienti disponibili ogni giorno sono rimaste costanti. Perciò egli non è più sicuro che la produzione corrente sia ottimale.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file MANGIMI.TXT.

### Dati.

Nell'azienda considerata i tipi di mangime sono 5, gli ingredienti da mescolare sono 4, le linee di produzione sono 3.

| Mangimi | Ingredienti |    |    |    |
|---------|-------------|----|----|----|
|         | A           | B  | C  | D  |
| 1       | 30          | 20 | 20 | 30 |
| 2       | 40          | 5  | 10 | 45 |
| 3       | 40          | 35 | 10 | 15 |
| 4       | 50          | 20 | 20 | 10 |
| 5       | 50          | 30 | 5  | 15 |

Table 1: Composizione percentuale dei mangimi: mangimi = righe; ingredienti = colonne).

| Mangime | Linea |    |   |
|---------|-------|----|---|
|         | 1     | 2  | 3 |
| 1       | 5     | 4  | 2 |
| 2       | 8     | 5  | 2 |
| 3       | 10    | 10 | 2 |
| 4       | 10    | 5  | 5 |
| 5       | 3     | 5  | 5 |

Table 2: Tempi di produzione dei mangimi (minuti / quintale) per ogni linea di miscelazione.

| Ingrediente | Quantità |
|-------------|----------|
| A           | 150      |
| B           | 135      |
| C           | 90       |
| D           | 75       |

Table 3: Ingredienti disponibili (quintali / giorno).

| Mangime | Prezzo | Nuovo prezzo |
|---------|--------|--------------|
| 1       | 40     | 10           |
| 2       | 50     | 10           |
| 3       | 35     | 55           |
| 4       | 55     | 65           |
| 5       | 30     | 40           |

Table 4: Prezzi di vendita per ogni tipo di mangime (€/ quintale) prima e dopo il fenomeno "mucca pazza".

| Mangime | Ora minima | Ora massima |
|---------|------------|-------------|
| 1       | 6:00       | 8:00        |
| 2       | 6:30       | 9:00        |
| 3       | 8:00       | 10:30       |
| 4       | 9:45       | 11:00       |
| 5       | 10:15      | 12:00       |

Table 5: Tempi minimi e massimi di inizio e fine lavorazione per ogni tipo di mangime.

| Linea | Mangime |    |     |   |    |
|-------|---------|----|-----|---|----|
|       | 1       | 2  | 3   | 4 | 5  |
| 1     | 27      | 0  | 12  | 0 | 50 |
| 2     | 33.75   | 13 | 2.5 | 6 | 30 |
| 3     | 60      | 0  | 90  | 0 | 21 |

Table 6: Piano di produzione attuale (quintali).

### Soluzione.

Poiché ogni tipo di mangime può essere prodotto in quantità diverse su linee diverse, occorre definire variabili  $x(m, \ell)$  continue non negative, che indicano quanto mangime di tipo  $m \in M$  viene prodotto su ogni linea  $\ell \in L$ , indicando con  $M$  l'insieme indicizzato dei mangimi e con  $L$  l'insieme indicizzato delle linee. Per comodità, la quantità totale di mangime prodotto per ogni tipo  $m \in M$  può essere eventualmente indicato da apposite variabili ausiliarie  $y_m = \sum_{\ell \in L} x_{m\ell}$ .

I vincoli dovuti alla quantità limitata di ingredienti disponibili, indicando con  $I$  l'insieme indicizzato degli ingredienti, sono dati da

$$\sum_{m \in M} \sum_{\ell \in L} a_{im} x_{m\ell} \leq b_i,$$

dove  $a_{im}$  indica la quantità di ingrediente  $i \in I$  per ogni unità di mangime  $m \in M$  e  $b_i$  indica la quantità di ingrediente  $i \in I$  disponibile.

Per esprimere i vincoli sui tempi di lavorazione e sulle relative finestre temporali, conviene introdurre variabili  $s_{m\ell}$  ed  $e_{m\ell}$ , continue e non-negative, per indicare l'istante in cui inizia (start) e finisce (end) la produzione di mangime di tipo  $m \in M$  sulla linea  $\ell \in L$ . Si ha quindi

$$t_{m\ell} x_{m\ell} = e_{m\ell} - s_{m\ell} \quad \forall m \in M, \forall \ell \in L,$$

dove  $t_{m\ell}$  è il tempo necessario a produrre un'unità di mangime di tipo  $m \in M$  sulla linea  $\ell \in L$ .

E' necessario quindi imporre che le miscele di mangimi diversi non si sovrappongano sulla stessa linea, cioè che la miscelazione del mangime  $m-1$  sia terminata quando inizia la miscelazione del mangime  $m$ . I vincoli corrispondenti sono:

$$s_{m\ell} \geq e_{m-1,\ell} \quad \forall \ell \in L, \forall m \in M : m \geq 2.$$

I vincoli sulle finestre temporali si esprimono ora molto semplicemente con

$$s_{m\ell} \geq S_m \quad e_{m\ell} \leq E_m \quad \forall m \in M, \forall \ell \in L,$$

dove  $S_m$  ed  $E_m$  sono gli istanti iniziale e finale della finestra temporale relativa al mangime di tipo  $m \in M$  (dati).

Il testo non specifica esplicitamente la funzione obiettivo. Poiché sono dati i prezzi di vendita dei mangimi è ragionevole scegliere di massimizzare i ricavi dell'azienda:

$$\text{maximize } z = \sum_{m \in M} c_m y_m.$$

Si tratta di un problema di programmazione lineare (file MANGIMI1.mod). La soluzione ottima ha un valore pari a 12086.25 [€/giorno].

Imponendo che le variabili  $x$  abbiano i valori indicati (produzione attualmente programmata dall'azienda) e togliendo dal modello i vincoli sui tempi (file MANGIMI2.mod), si scopre che i ricavi sono maggiori (12497.50 €/giorno) ma effettivamente la produzione è in ritardo rispetto a quanto sarebbe imposto dalle finestre temporali. Il problema segnalato dal responsabile della distribuzione quindi esiste davvero.

Il responsabile delle vendite invece si sbaglia. Non è vero che con il ritmo attuale i profitti siano ottimizzati: imponendo come limiti delle finestre temporali i valori attuali di inizio e fine lavorazione per ogni mangime (bisogna scegliere naturalmente il minimo dei tre valori per i tempi di inizio e il massimo dei tre per i tempi di fine, come nel file MANGIMI3.mod) si scopre che sarebbe possibile produrre con gli stessi tempi e con un ricavo maggiore (12922.50 €/giorno).

Infine, considerando i nuovi prezzi di vendita dei mangimi determinati dall'allarme per la mucca pazza (MANGIMI4.mod), si può ottenere la nuova soluzione ottima che vale 10340 €/giorno.