

Magazzino automatico.

Un magazzino automatico è fatto da una matrice rettangolare di celle di uguale dimensione, ciascuna delle quali contiene un box con dei materiali. Una delle posizioni nella matrice è denominata “origine” e non contiene materiali bensì funge da interfaccia con l’esterno. È la posizione da cui devono essere prelevati i box che vengono immessi nel magazzino e a cui devono essere portati i box che devono uscire dal magazzino. Un carrello può muoversi in linea retta da qualsiasi posizione a qualsiasi altra, prelevare un box o consegnare un box. Il carrello ha capacità pari a 2 box. Sono dati un insieme di ordini di prelievo e un insieme di ordini di consegna. I primi richiedono l’estrazione di un box dal magazzino, i secondi l’inserimento di un box nel magazzino. Ciascun ordine può essere soddisfatto accedendo a una data posizione. Le posizioni associate agli ordini sono tutte diverse tra loro. Gli ordini possono essere soddisfatti in qualsiasi sequenza ed il carrello può soddisfare sia ordini di consegna che di prelievo tra due visite consecutive all’origine. Tuttavia, se nello stesso viaggio il carrello esegue sia consegne che prelievi, le consegne devono essere eseguite prima e i prelievi dopo. Si vuole pianificare in modo ottimale i movimenti del carrello in modo da minimizzare la distanza complessivamente percorsa per soddisfare tutti gli ordini.

Scrivere il modello matematico del problema, classificarlo e risolverlo con i dati indicati nel seguito, discutendo ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Esempio.

Il magazzino è una matrice con 13 colonne e 5 righe. Le posizioni sono numerate da 1 a 65 per righe: riga 1 da 1 a 13, riga 2 da 14 a 26, eccetera.

L’origine è in posizione 33, cioè riga 3, colonna 7.

Dimensioni di ogni cella della matrice: in orizzontale: 1.0 metri; in verticale: 0.6 metri.

Consegna	Sito	Prelievo	Sito
1	24	1	38
2	39	2	26
3	12	3	11
4	60	4	9
5	48	5	63
6	49	6	18
7	42	7	55
8	19		
9	5		

Table 1: Consegne e prelievi.

Soluzione.**Dati.**

Indichiamo con R e C l'insieme delle righe e delle colonne della matrice, numerate da 1. Quindi $R = 1, \dots, 5$ e $C = 1, \dots, 13$. Siano inoltre P l'insieme dei prelievi e D l'insieme delle consegne. Indichiamo con p_i la posizione di prelievo per ogni ordine $i \in P$; Indichiamo con d_i la posizione di consegna per ogni ordine $i \in D$. Indichiamo con $p_0 = 33$ la posizione dell'origine.

Dato che l'obiettivo richiede di minimizzare la distanza totale percorsa, è evidente che bisogna pre-calcolare le distanze tra coppie di posizioni da visitare. Definiamo quindi un grafo pesato, in cui l'insieme dei nodi è $V = P \cup D \cup \{0\}$, dove 0 indica l'origine. Per ogni coppia di nodi del grafo bisogna calcolare la corrispondente distanza Euclidea. Serve quindi anzitutto tradurre ogni posizione p_i in una coppia di coordinate (r_i, c_i) per ogni $i \in V$:

$$\begin{aligned} r_i &= (p_i - 1)DIV|C| + 1 \\ c_i &= (p_i - 1)MOD|C| + 1. \end{aligned}$$

(Numerare le righe e le colonne da 0 anziché da 1, semplifica leggermente questo passaggio). Per ogni arco del grafo, cioè per ogni $(i, j) \in V \times V$ la corrispondente distanza Δ_{ij} , espressa in metri, è data da

$$\Delta_{ij} = \sqrt{((r_i - r_j)v)^2 + ((c_i - c_j)h)^2},$$

dove h e v sono le dimensioni orizzontale e verticale di ogni cella della matrice, espresse in metri.

Variabili.

I percorsi sono definiti da variabili binarie x_{ij} , una per ogni coppia di posizioni (i, j) , che indica se il carrello si sposta da i a j . Le distanze sono simmetriche, ma a causa dell'asimmetria tra consegne e prelievi, le variabili del problema corrispondono ad archi orientati.

Obiettivo.

L'obiettivo da minimizzare è la somma pesata delle variabili binarie, ciascuna moltiplicata per la corrispondente distanza:

$$\text{minimize } z = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \Delta_{ij} x_{ij}.$$

Vincoli.

Tutti i siti di prelievo e consegna devono essere visitati. Quindi deve essere scelto un arco entrante ed un arco uscente per ciascuno di essi.

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = \sum_{j \in V} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in P \cup D.$$

Tutti i siti di consegna devono essere visitati prima di quelli di prelievo, in ogni viaggio del carrello. Quindi non può essere percorso alcun arco che va da un sito di prelievo ad un sito di consegna.

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i \in P \quad \forall j \in D. \quad (1)$$

Nessun viaggio del carrello può visitare più di due siti di prelievo e più di due siti di consegna. Quindi non ci possono essere due archi consecutivi che uniscono punti di prelievo o punti di consegna.

$$x_{ij} + x_{jk} \leq 1 \quad \forall i, j, k \in P \quad (2)$$

$$x_{ij} + x_{jk} \leq 1 \quad \forall i, j, k \in D \quad (3)$$

Questi vincoli sono anche sufficienti ad evitare che la soluzione possa contenere sottocicli non collegati con l'origine. Se un sottociclo contenesse siti di entrambi i tipi, conterrebbe necessariamente anche un arco da un sito di prelievo ad un sito di consegna, il che è proibito dai vincoli (1). Se un sottociclo contenesse due o più posizioni dello stesso tipo, conterrebbe anche almeno due archi che le collegano, il che è proibito dai vincoli (2) e (3). I vincoli impongono che un viaggio non possa contenere più di 4 tappe, 2 di prelievo e 2 di consegna, nel rispetto della capacità del carrello.

Il problema è di PLI. L'ottimalità della soluzione calcolata dal solutore è garantita, l'unicità no.