

Logistica distribuita.

Un corpo d'armata deve rifornire di viveri i reparti in prima linea. Sono noti un insieme di origini (magazzini) e un insieme di destinazioni (reparti), ciascuno in posizione data, rappresentata da una coppia di coordinate nel piano Cartesiano. Per ogni magazzino è nota la quantità di viveri presenti e per ogni reparto è nota la quantità di viveri necessaria. I trasporti avvengono in linea d'aria ed il costo è proporzionale alla distanza percorsa e alla quantità trasportata secondo un coefficiente noto, espresso in [Euro / (chilogrammo * chilometro)].

Si vuole minimizzare il costo complessivo dei trasporti.

Le operazioni di trasporto sono vulnerabili al fuoco nemico. Pertanto, si vuole minimizzare la perdita di viveri nel caso in cui i trasporti per una qualunque coppia origine/destinazione vengano distrutti. A questo scopo si vuole minimizzare la massima tra le quantità trasportate per ogni coppia origine/destinazione.

Per entrambe le versioni, formulare il problema e classificarlo.

Risolvere, nei due casi, l'esempio descritto dai dati riportati nel seguito, discutendo ottimalità e unicità delle soluzioni trovate.

Verificare che i due obiettivi sono conflittuali e ricavare la regione Pareto-ottima.

Calcolare il punto-utopia e determinare la soluzione Pareto-ottima per la quale il rapporto tra i valori dei due obiettivi è uguale a quello che si osserva nel punto-utopia.

Dati.

I magazzini sono 5. I reparti sono 12.

Magazzino	x	y	Scorta
1	8	15	230
2	14	3	320
3	21	12	125
4	26	16	100
5	35	8	465

Tabella 1: Posizione dei magazzini [km] e scorte disponibili [kg].

Reparto	x	y	Domanda
1	4	20	80
2	10	24	90
3	11	28	100
4	15	25	90
5	18	29	100
6	23	32	120
7	27	20	85
8	28	27	100
9	30	32	110
10	36	30	110
11	38	25	100
12	40	35	120

Tabella 2: Posizione dei reparti [km] e quantità necessarie [kg].

Il trasporto di un chilogrammo per un chilometro costa 4.5 euro.

Soluzione.*Dati.*

Sono dati

- l'insieme indicizzato M dei magazzini;
- l'insieme indicizzato R dei reparti;
- la scorta disponibile s_i per ogni magazzino $i \in M$ [kg];
- la richiesta r_j per ogni reparto $j \in R$ [kg];
- la distanza d_{ij} [km] tra ogni magazzino $i \in M$ ed ogni reparto $j \in R$, calcolabile a partire dalle posizioni date;
- il coefficiente di costo dei trasporti, k [€/ (kg*km)].

Variabili.

Sono variabili del problema le quantità di viveri $x_{ij} \geq 0$ trasportate da ogni magazzino $i \in M$ ad ogni reparto $j \in R$ [kg]. Sono variabili continue e non-negative.

Vincoli.

Il problema richiede i seguenti vincoli.

- Vincoli di soddisfacimento della domanda [kg]:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \geq r_j \quad \forall j \in R.$$

- Vincoli di capacità [kg]:

$$\sum_{j \in R} x_{ij} \leq s_i \quad \forall i \in M.$$

Obiettivi.

Il primo obiettivo è la minimizzazione dei costi totali di trasporto, espresso in euro.

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{i \in M, j \in R} k d_{ij} x_{ij}.$$

Il secondo obiettivo è la minimizzazione della massima quantità trasportata, espressa in chilogrammi. Trattandosi di un obiettivo di tipo min-max, va linearizzato introducendo un'opportuna variabile ausiliaria, che indichiamo con y :

$$\text{minimize } z_2 = y$$

$$y \geq x_{ij} \quad \forall i \in M, j \in R.$$

Classificazione.

In entrambi i casi il problema è di PL. Quindi, della soluzione fornita dal solutore è garantita l'ottimalità.

Risoluzione.

Con il primo obiettivo, la soluzione ottima costa 103036.2275 euro, ma richiede di trasportare 120 chilogrammi tra il magazzino 5 e il reparto 12. Dall'analisi dei costi ridotti si nota che nessuna variabile fuori-base ha costo ridotto nullo: la soluzione ottima è quindi unica.

Con il secondo obiettivo, la quantità massima trasportata è pari a 35.83 chilogrammi, ma il costo totale di trasporto è pari a 124829.91665 euro. Dall'analisi dei costi ridotti si nota che molte variabili fuori-base hanno costo ridotto nullo: la soluzione ottima non è unica.

Queste due soluzioni sono gli estremi della regione Pareto-ottima, che può essere ricavata tramite l'analisi parametrica su uno dei due obiettivi. Il risultato è riportato in Tabella 3.

Il punto-utopia ha coordinate $z_1 = 103036.2275$ e $z_2 = 35.8333$, sicché il loro rapporto è $\alpha = 2875.43$. Imponendo che questo sia il rapporto, tra z_1 e z_2 si ottiene una soluzione Paretiana con $z_1 = 119702$ euro e $z_2 = 41.63$ chilogrammi. Tale soluzione cade tra le due soluzioni Paretiane di base separate dalla linea orizzontale nella tabella 3.

z_1 [€]	z_2 [kg]
103036.2275	120.00000
103270.67321	110.00000
103349.46216	108.33333
103389.60684	107.50000
103780.44722	100.00000
104413.96483	93.00000
104734.52420	90.00000
105908.43888	80.00000
106218.59305	77.50000
106380.90643	76.66667
107710.84184	70.00000
107915.64565	69.00000
108495.77737	66.42857
109459.42887	63.12500
110245.97723	60.83333
110532.04652	60.00000
111034.41458	58.57143
111412.63055	57.50000
111942.19497	56.00000
112327.30578	55.00000
112809.24089	53.75000
113449.28236	52.50000
113878.78702	51.66667
114738.06282	50.00000
115804.02645	48.00000
116203.34824	47.27273
116275.07907	47.14286
116554.90159	46.66667
117540.48272	45.00000
119091.63282	42.50000
120844.66464	40.00000
121675.93362	38.88889
122208.89146	38.33333
123956.23568	36.66667
124829.91665	35.83333

Tabella 3: Soluzioni di base Pareto-ottime.