Inviti a cena.

Il ricercatore operativo, stanco di studiare per l'esame, vuole concedersi alcuni giorni di allegria e pianifica di invitare a cena alcune sue amiche (una per sera, naturalmente). Alcune tra le ragazze si conoscono tra loro e se una fosse invitata ciò sarebbe risaputo dalle sue amiche. Onde evitare spiacevoli scene di gelosia, il piano degli inviti a cena deve essere perciò congegnato in modo che nessuna delle invitate sia amica di un'altra invitata. Il giovanotto attribuisce un indice di gradimento ad ogni ragazza, pari al piacere di passare la serata con lei, e desidera naturalmente che gli inviti siano tali da massimizzare il gradimento complessivo, cioè la somma degli indici di gradimento delle ragazze invitate.

Formulare il problema e risolvere l'esempio descritto nel seguito.

Esempio.

Amiche	Indici di gradimento
Samantha	100
Jessica	100
Melissa	90
Pamela	85
Naomi	50
Anastasia (1)	20
Genoveffa (1)	15
Grimilde (2)	10

Tabella 1: Amiche e indici di gradimento. (1) sorellastre di Cenerentola. (2) regina/strega di Biancaneve.

Gruppi di amiche
Samantha, Jessica, Melissa
Jessica, Melissa, Pamela
Jessica, Grimilde
Melissa, Genoveffa
Pamela, Naomi
Grimilde, Genoveffa, Naomi
Grimilde, Genoveffa, Anastasia

Tabella 2: Relazioni di conoscenza tra le amiche.

Soluzione.

Dati. Il problema di formula su un grafo, dove ogni vertice corrisponde ad una delle amiche ed esiste un lato $[i, j]$ per ogni coppia di amiche che si conoscono tra loro. Sia V l'insieme dei vertici e E l'insieme dei lati. Il grafo è pesato sui vertici con l'indice di gradimento $g_i \ \forall i \in V$.

Variabili. Una variabile binaria x_i associata ad ogni vertice $i \in V$ del grafo indica se la corrispondente amica viene invitata a cena (1) o no (0).

Vincoli. Il vincolo che immpone di non invitare a cena amiche che si conoscono tra loro si traduce in vincoli di incompatibilità. Ogni latoo del grafo indica che sono incompatibili i suoi due estremi, il che si traduce nelle disequazioni

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall [i, j] \in E.$$

Obiettivo. L'obiettivo è la massimizzazione del peso totale del sottinsieme di vertici selezionati:

$$\text{maximize } z = \sum_{i \in V} g_i x_i.$$

Il problema è di PLI con variabili binarie: è il problema noto come Max Weighted Independent Set ed è NP-hard.

L'ottimalità della soluzione calcolata dal solutore è garantita, l'unicità no.

La soluzione ottima dell'esempio proposto ha valore ottimo $z^* = 205$ ed è costituita dal sottinsieme $\{Samantha, Pamela, Anastasia\}$.

Il rilassamento continuo del problema si può rafforzare, sostituendo i vincoli di incompatibilità sulle coppie di vertici con vincoli di incompatibilità su cliques, cioè sottografi completi. Tali sottografi corrispondono ai gruppi di amiche che si conoscono tutte tra loro, elencati nella tabella 2. Ciascuna disequazione (clique inequality) ha la forma

$$\sum_{i \in C_k} x_i \leq 1 \quad \forall k \in K,$$

dove si è indicato con K l'insieme indicizzato delle cliques e con C_k la generica clique ($C_1 = \{Samantha, Jessica, Melissa\}, C_2 = \{Jessica, Melissa, Pamela\}$, eccetera). Le clique inequalities sono più forti perché rendono inammissibili alcune soluzioni frazionarie che invece sono ammissibili per i vincoli sui singoli lati del grafo: ad esempio, una soluzione frazionaria in cui $x = 1/2$ per ciascun vertice è ammissibile per i vincoli sui lati, ma non è ammissibile per una clique inequality quando la cardinalità della clique è maggiore di 2.