

Frequenze

L'Authority per le telecomunicazioni deve assegnare le opportune frequenze ad una nuova emittente della Protezione Civile, affinché possa trasmettere in una data banda. Poiché si tratta di un servizio di rilevante interesse nazionale, le frequenze disponibili devono essere il più numerose possibile. Tuttavia, alcune frequenze sono incompatibili con altre per fenomeni di interferenza elettromagnetica. L'emittente non deve ricevere coppie di frequenze incompatibili tra loro. Due frequenze interferiscono quando la loro differenza (in valore assoluto) è inferiore ad un dato valore limite k .

Formulare il problema e risolvere l'esempio riportato nel seguito.

Esempio

Due frequenze interferiscono se la loro differenza è inferiore a 5. Le frequenze disponibili sono elencate nella tabella 1.

101	112	125	135
103	114	128	136
105	116	129	138
107	118	132	140
109	121	133	
110	124	134	

Tabella 1: Elenco delle frequenze disponibili.

Soluzione

Dati. Sia F l'insieme indicizzato delle frequenze e sia f_i il valore della frequenza $i \in F$. E' dato poi il minimo valore k di differenza tra frequenze compatibili.

Variabili. Una variabile binaria x_i per ogni frequenza $i \in F$ indica se essa viene assegnata all'emittente (1) o no (0).

Obiettivi. La funzione obiettivo richiede di trovare il massimo numero di frequenze assegnabili, cioè di massimizzare la somma delle variabili x .

$$\text{maximize } z = \sum_{i \in F} x_i.$$

Vincoli. I vincoli del problema impongono che due frequenze i e j non possano essere assegnate entrambe quando la loro differenza in valore assoluto è minore o uguale ad un dato limite k . Tali vincoli si possono facilmente esprimere come vincoli di incompatibilità tra le due scelte:

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall i \in F, j \in F : |f_i - f_j| < k.$$

Il modello risultante è di PLI con variabili 0-1 è quello del Max Independent Set Problem formulato sul grafo delle incompatibilità. Data la particolare struttura del grafo (interval graph), il problema è polinomiale e si può risolvere semplicemente anche con un algoritmo greedy, selezionando la prima frequenza e poi iterativamente la prima frequenza che non interferisca con l'ultima selezionata.