

**Fornitura** Un'impresa artigiana agroalimentare rifornisce un centro commerciale di due tipi di lavorati. Gli operai dell'impresa lavorano in tre turni (dalle 6 alle 14, dalle 14 alle 22 e dalle 22 alle 6). Il costo della produzione di ogni tipo di lavorato varia da turno a turno, a causa della diversa paga oraria degli operai. Alla fine di ciascun turno, parte dei lavorati prodotti viene trasportata al centro commerciale, parte può essere immagazzinata in una cella frigorifera e trasportata al centro commerciale al termine dei turni successivi. Anche la conservazione dei lavorati nella cella, tuttavia, ha un costo. La produzione di ciascun lavorato richiede l'utilizzo di alcune materie prime, conservate in una cella frigorifera esterna, diversa da quella utilizzata per i lavorati e avente capacità limitata. Il rifornimento di materie prime deve essere effettuato una volta al giorno, all'inizio del primo turno. L'impresa deve assicurare una fornitura minima giornaliera al centro commerciale. Inoltre, a causa di convenzioni con i trasportatori, sono fissati dei limiti minimi e massimi alla quantità totale di lavorati trasportabili dall'impresa al centro commerciale alla fine di ogni turno.

Si vuole pianificare la produzione giornaliera e le operazioni di rifornimento, minimizzando i costi.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file FORNIT.TXT, riportati anche qui di seguito.

Potendo spendere un dato budget per modificare qualcuno dei vincoli del problema, su quali vincoli avrebbe senso agire e con quali miglioramenti possibili?

Turno	Lavorato A	Lavorato B
1	12	15
2	8	11.5
3	10	12

Table 1: Costi di produzione (Euro / Kg)

Lavorato	Costo
A	1.8
B	0.4

Table 2: Costi di conservazione dei lavorati nella cella (Euro / Kg).

**Dati.** Capacità della cella per gli ingredienti: 7100 decimetri cubi.

Fornitura minima giornaliera per il centro commerciale: 300 Kg.

Ingrediente	Lavorato A	Lavorato B
X	20	50
Y	60	10
Z	20	40

Table 3: Composizione dei lavorati (percentuale).

Ingrediente	Volume
X	20
Y	35
Z	15

Table 4: Volume degli ingredienti (decimetri cubi / Kg).

Turno	Minimo	Massimo
1	65	135
2	70	135
3	50	135

Table 5: Limiti alle quantità trasportabili dopo ogni turno (Kg).

**Soluzione.** Indichiamo con  $P$  l'insieme dei prodotti, con  $\mathcal{T}$  l'insieme dei turni e con  $T$  il numero di turni, con  $I$  l'insieme degli ingredienti, con  $c_{jt}^{prod}$  il costo di produzione per ogni prodotto  $j \in P$  e ogni turno  $t \in T$ , con  $c_j^{mag}$  il costo di stoccaggio giornaliero per ogni prodotto  $j \in P$ , con  $f$  la fornitura minima richiesta, con  $q_t^{min}$  e  $q_t^{max}$  le quantità minima e massima da trasportare dopo ogni turno  $t \in T$ , con  $a_{ij}$  la composizione dei prodotti (trasformando la percentuale data in frazione tra 0 e 1), con  $v_i$  il volume unitario di ogni ingrediente  $i \in I$ , con  $C$  la capacità del magazzino ingredienti.

Le variabili decisionali sono le seguenti:  $x_{jt} \geq 0$  indica la produzione per ogni prodotto ed ogni turno,  $y_{jt} \geq 0$  indica la quantità trasportata al centro commerciale per ogni prodotto e ogni turno,  $s_{jt} \geq 0$  indica lo stock nel magazzino per ogni prodotto al termine di ogni turno,  $b_i \geq 0$  indica la quantità consumata in ogni giorno per ogni ingrediente. Tutte le variabili sono continue e non-negative. Le variabili  $x$  e  $y$  sono sufficienti a determinare la soluzione. Le variabili ausiliarie  $s$  e  $b$  sono introdotte per maggior comodità.

Sono richiesti vincoli di conservazione per legare le variabili  $s$  alle variabili  $x$ . Se i turni sono numerati da 0 a  $T - 1$  anziché da 1 a  $T$ , i vincoli si possono esprimere così:

$$s_{j,(t-1+T) \pmod T} + x_{jt} = s_{jt} + y_{jt} \quad \forall j \in P, t = 0, \dots, T - 1.$$

Il vincolo sulla fornitura minima è

$$\sum_{j \in P} \sum_{t \in \mathcal{T}} y_{jt} \geq f.$$

I vincoli sulle quantità trasportate sono

$$\sum_{j \in P} y_{jt} \geq q_t^{min} \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$\sum_{j \in P} y_{jt} \leq q_t^{max} \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

I vincoli sul consumo di ingredienti, che legano le variabili  $b$  alle variabili  $x$  sono

$$b_i = \sum_{j \in P} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{jt} a_{ij} \quad \forall i \in I.$$

Il vincolo di capacità del magazzino è

$$\sum_{i \in I} v_i b_i \leq C.$$

Infine, l'obiettivo richiede di minimizzare i costi complessivi che sono dati dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio:

$$\text{minimize } z = \sum_{j \in P} \sum_{t \in \mathcal{T}} (c_{jt}^{prod} x_{jt} + c_j^{mag} s_{jt}).$$

Il modello risultante è di programmazione lineare e la sua soluzione calcolata dal solutore è garantita essere ottima. Poiché tutti i costi ridotti delle variabili fuori base sono diversi da zero, la soluzione ottima è anche unica.

I vincoli su cui avrebbe senso investire il budget per rilassarli sono quelli attivi: Il prezzo-ombra del vincolo sulla fornitura minima è pari a 16.7176. Quindi per ogni Kg in meno di fornitura giornaliera richiesta, si avrebbe un risparmio giornaliero di 16,7176 euro. Analoghe considerazioni valgono per il vincolo sulla quantità minima trasportabile nel primo turno (prezzo-ombra 0.4) e per quello sulla quantità massima trasportabile nel secondo turno (prezzo-ombra -1.8). Il segno dei prezzi-ombra è opposto perché nel primo caso si avrebbe un risparmio diminuendo il termine noto  $q_0^{min}$ , nel secondo caso aumentando il termine noto  $q_1^{max}$ . Anche il vincolo di capacità del magazzino è attivo (prezzo-ombra -0.247059): si avrebbe perciò un risparmio di circa 0.25 euro al giorno per ogni decimetro cubo aggiuntivo. E' importante notare che tali risparmi non si avrebbero per qualsiasi aumento o diminuzione dei termini noti dei vincoli, ma solo all'interno del range definito dall'analisi di sensitività, cioè solo finché la base ottima non cambia.