

Fonderia.

Una fonderia deve pianificare la produzione di lingotti di diverse leghe, ottenute miscelando metalli in percentuali differenti e conosciute. Il reparto rifornimenti conosce le quantità di materie prime che saranno disponibili nel periodo di riferimento. Ciò che non si conosce è quale sarà il prezzo a cui i prodotti potranno essere venduti, a causa della situazione incerta del mercato. Gli esperti ipotizzano che si possano verificare due scenari e indicano quali potrebbero essere i prezzi nei due casi. Non disponendo di altre informazioni, il consiglio di amministrazione decide di seguire una strategia volta ad ottimizzare i ricavi dell'azienda nel caso peggiore.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file `FONDERIA.TXT`. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Valutare di quanto si discosta il ricavo ottenuto in tal modo dal ricavo ottenibile ottimizzando rispetto ad uno solo dei due scenari possibili.

Il reparto rifornimenti comunica di essere in grado di rifornirsi di ulteriori quantitativi di materie prime, di tutti i tipi. Valutare le offerte per decidere se e di quanto sia conveniente rifornirsi ulteriormente.

Esempio.

I prodotti sono 3 (indicati da P1, P2, P3). Le materie prime sono di 4 tipi (indicate da M1, M2, M3, M4).

Mat. prima	Quantità
M1	2900
M2	2200
M3	4000
M4	1550

Tabella 1: Disponibilità delle materie prime [kg/settimana].

Mat.pr.	P1	P2	P3
M1	58	21	28
M2	12	14	39
M3	20	51	12
M4	10	14	21

Tabella 2: Coefficienti tecnologici: percentuale di materia prima per ogni prodotto.

Prodotto	Prezzo 1	Prezzo 2
P1	6	12
P2	10	10
P3	12	6

Tabella 3: Prezzi nei due scenari [Euro/kg].

Materia prima	Prezzo
M1	18
M2	10.5
M3	4.5
M4	2

Tabella 4: Prezzi di rifornimento ulteriore [Euro/kg].

Soluzione.

Dati. Siano P l'insieme dei prodotti e M l'insieme delle materie prime. Sia a_{mp} il coefficiente tecnologico, espresso in percentuale. Sia b_m la disponibilità settimanale di materia prima $m \in M$, espressa in chilogrammi. Siano c_p^1 e c_p^2 i prezzi di vendita di ogni prodotto $p \in P$, espresso in euro per kg nei due scenari.

Variabili. Definiamo x_p la produzione settimanale di prodotto $p \in P$, espressa in chilogrammi. Sia δ la variabile ausiliaria necessaria per linearizzare l'obiettivo. Tutte le variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. I vincoli sul consumo di risorse per ogni materia prima sono i seguenti:

$$\sum_{p \in P} \frac{a_{mp}}{100} x_p \leq b_m \quad \forall m \in M.$$

Obiettivo. La strategia scelta dall'azienda è di tipo max-min, poiché richiede di massimizzare i ricavi nel caso peggiore. Perciò si deve inserire nella formulazione una variabile ausiliaria δ da massimizzare, imponendo che sia minore o uguale ad entrambe le combinazioni lineari delle variabili x corrispondenti alle due possibili funzioni obiettivo. L'obiettivo max-min è

$$\text{maximize } z = \delta$$

con i vincoli

$$\begin{aligned} \delta &\leq \sum_{p \in P} c_p^1 x_p \\ \delta &\leq \sum_{p \in P} c_p^2 x_p \end{aligned}$$

Classificazione. Il problema è il classico problema di programmazione lineare in cui si richiede di ottimizzare il mix produttivo di un'azienda, con una variabile x per ogni prodotto e un vincolo per ogni materia prima, con la differenza che bisogna considerare due diverse funzioni-obiettivo dato che i prezzi di vendita dei prodotti sono diversi nei due scenari possibili. Poiché è un modello di programmazione lineare, la soluzione calcolata dai solutori è garantita essere ottima.

Il modello è nel file `FONDERIA.MOD` e la soluzione ottima corrispondente è nel file `FONDERIA.OUT`.

Il valore ottimo della strategia maxmin è $z = 98605.27733$ euro ed è uguale in entrambi gli scenari (entrambi i vincoli su δ sono attivi).

Ottimizzando rispetto al primo scenario si ottiene $z = 103056.4784$ Euro, mentre ottimizzando rispetto al secondo si ottiene $z = 98770.68558$ Euro.

Delle materie prime M2 e M4 non conviene fare ulteriori rifornimenti poiché i corrispondenti vincoli non sono attivi (le materie prime avanzano). Per valutare la convenienza delle materie prime M1 e M3 invece bisogna ricorrere all'analisi post-ottimale. Il prezzo-ombra di M1 è pari a 16,1012 Euro/kg: quindi l'acquisto a 18 Euro/kg non conviene. Il prezzo-ombra di M3 invece è di 12,9779 Euro/kg, quindi l'acquisto a 4,5 Euro/kg conviene. Per stabilire la quantità ottimale di M3 da acquistare bisogna ricorrere all'analisi parametrica: il prezzo-ombra di M3 scende sotto i 4,5 Euro/kg, rendendo l'acquisto ulteriore non più conveniente, solo quando si azzerà perché il vincolo su M3 non è più attivo. Ciò accade quando il termine noto raggiunge il valore di 5646.42857 kg (corrispondente ad un aumento di 1646.42857 kg rispetto alla quantità già disponibile).