Programmazione a molti obiettivi
Esercizi

Giovanni Righini

Esercizio 1: dominanza e curve di livello.

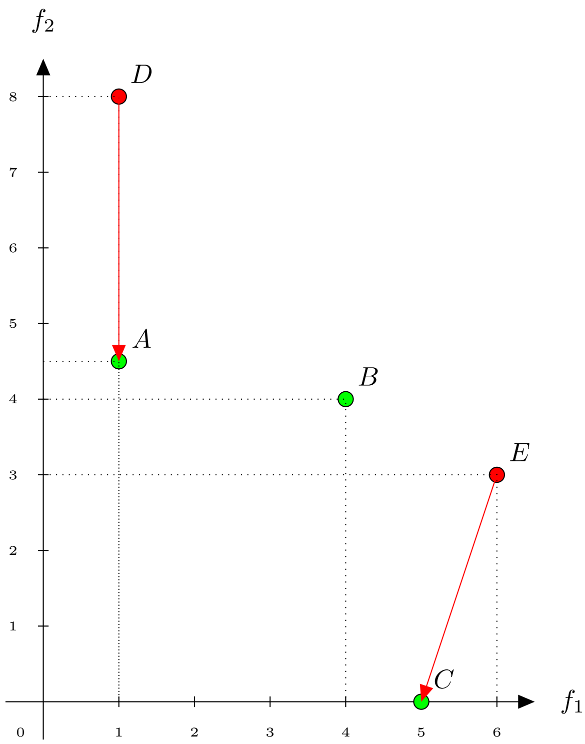
Un problema di programmazione a due obiettivi nel discreto richiede di minimizzare due funzioni obiettivo f_1 e f_2 ed ha le seguenti cinque soluzioni, di cui si conoscono le coordinate nello spazio degli obiettivi.

Soluzione	f_1	f_2
A	1	9/2
B	4	4
C	5	0
D	1	8
E	6	3

1. Quali soluzioni sono paretiane?
2. Determinare la soluzione ottima con le curve di livello $\phi = \sqrt[p]{f_1^p + f_2^p}$ for $p = 1$, $p = 2$ and $p \to \infty$.

Risposta 1.

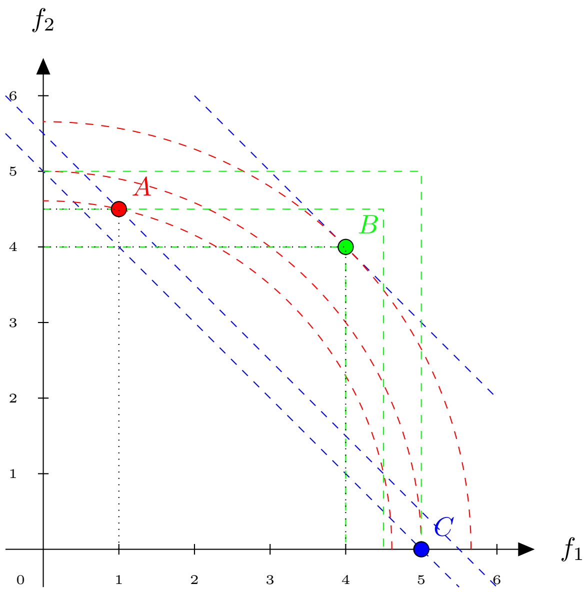
Confrontando a due a due tutte le soluzioni, si ricava che D è dominata da A e E è dominata da C.



Risposta 2.

Nei tre casi $p = 1$, $p = 2$ e $p \to \infty$ si ha rispettivamente $\phi_1 = f_1 + f_2$, $\phi_2 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ e $\phi_\infty = \max\{f_1, f_2\}$. I valori delle tre soluzioni paretiane sono indicati nella tabella seguente. I valori ottimi sono indicati in grassetto.

Soluzione	f_1	f_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_∞
A	1	$9/2$	$11/2$	$\sqrt{85}/2$	$9/2$
B	4	4	8	$4\sqrt{2}$	**4**
C	5	0	**5**	5	5



Esercizio 2.

Il consiglio di amministrazione di un'impresa manifatturiera multinazionale deve pianificare gli investimenti per l'anno venturo ed il processo decisionale si svolge in condizioni di incertezza: può darsi infatti che entri in vigore una nuova normativa, che avrebbe effetti molto importanti, modificando sensibilmente i rendimenti degli investimenti fatti.
La strategia aziendale si è concentrata su quattro prodotti, X, Y, Z e W, la cui produzione richiede il consumo di quattro materie prime A, B, C e D.
Le quantità disponibili di materie prime sono 100, 120, 90 e 110 (in un'opportuna unità di misura) e le quantità di materia prima necessarie a produrre ogni unità di prodotto sono indicate nella tabella.

	X	Y	Z	W
A	3	2	5	4
B	8	10	1	1
C	1	3	6	9
D	2	0	8	11

I ricavi per ogni unità di prodotto attualmente sono $1,0$, $1,5$, $1,3$ e $2,5$, ma se venisse introdotta la nuova normativa diventerebbero $1,7$, $0,4$, $2,0$ e $0,7$.
Dal verbale dell'ultima riunione del consiglio di amministrazione emergono posizioni e proposte assai differenti.

Consigliere A. Sostiene che la normativa sarà senz'altro introdotta e che quindi la produzione dell'azienda deve essere pianificata ipotizzando che si verifichi il secondo scenario.

Consigliere B. Si dice convinto che tutto resterà come ora e che quindi sia più logico pianificare la produzione ottimizzandola rispetto al primo scenario.

Consigliere C. Stima che la cosa migliore sia quella di seguire una strategia mista, ipotizzando che la probabilità di approvazione della nuova normativa sia del 30%, ma ammette di non sapere come si possa tradurre questa stima in una decisione riguardo alla produzione ottima.

Consigliere D. Concorda col consigliere C sulla necessità di adottare una strategia mista; valuta che la probabilità di approvazione della nuova normativa sia del 75% e sostiene che la produzione ottima si calcola con una media pesata con coefficienti 25% e 75% delle due produzioni ottime nei due scenari possibili.

Consigliere E. Sostiene che la probabilità di approvazione della legge non si può indovinare così facilmente e che bisognerebbe quindi valutare infinite strategie miste, una per ogni possibile valore della probabilità. Siccome ciò è impossibile, si dichiara scettico e pessimista.

Consigliere F. Concorda col pessimismo del consigliere E e quindi suggerisce di essere prudenti e di scegliere l'alternativa che si riveli migliore nel caso peggiore.

Consigliere G. Afferma che in questi casi è più che mai necessario pensare positivo e quindi caldeggia la proposta di scegliere la politica che assicuri il massimo profitto nel caso migliore.

Né il consigliere F né il consigliere G sanno però se augurarsi che la nuova normativa venga introdotta oppure no.

Consigliere H. Dice di conoscere una veggente molto brava e propone di affidarsi a lei.

Nella prossima riunione l'amministratore delegato deve dimostrare di aver valutato correttamente tutte le alternative e in mezzo a tanta confusione deve portare argomentazioni convincenti, cioè quantitative e dimostrabili. Sapreste aiutarlo?

Soluzione.
Se l'obiettivo fosse uno solo, il problema sarebbe un classico esempio di calcolo del mix produttivo ottimale, che si può formulare come problema di PL con tante variabili quanti i prodotti e tanti vincoli quante le risorse (materie prime).

I dati del problema sono:

- l'insieme P dei prodotti e l'insieme R delle risorse;
- la matrice a dei coefficienti tecnologici, data in tabella;
- il vettore b dei termini noti (quantità di risorse disponibili);
- i due vettori c' e c'' della funzione obiettivo.

Le variabili x, continue e non-negative, sono tante quanti i prodotti.

I vincoli sono i classici vincoli sul consumo di risorse:

$$\sum_{j \in P} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in R$$

Gli obiettivi sono due e corrispondono ai due vettori di coefficienti della funzione obiettivo:

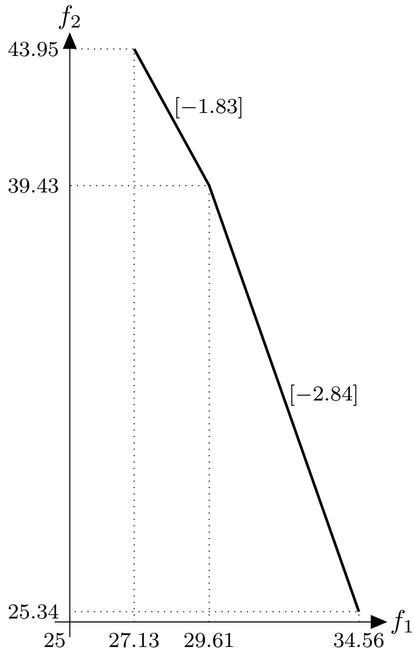
$$\text{maximize } f_1 = \sum_{j \in P} c'_j x_j$$

$$\text{maximize } f_2 = \sum_{j \in P} c''_j x_j$$

Per eseguire l'analisi del problema lineare con due obiettivi, utilizziamo il metodo dei vincoli e trasformiamo il primo obiettivo in un vincolo con un parametro f_1 come termine noto:

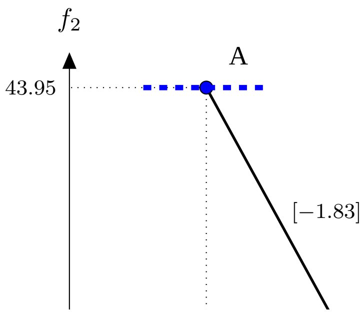
$$\begin{aligned}
\text{maximize } f_2 = & 1,7x_1 + 0,4x_2 + 2x_3 + 0,7x_4 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 100 \\
& 8x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 \leq 120 \\
& x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 \leq 90 \\
& 2x_1 + +8x_3 + 11x_4 \leq 110 \\
& x_1 + 1,5x_2 + 1,3x_3 + 2,5x_4 \geq f_1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

Eseguendo l'analisi parametrica sul vincolo si ottiene il grafico seguente.

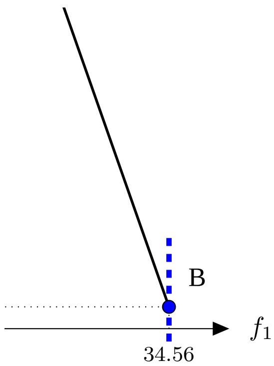


Esaminiamo ora una per una le affermazioni dei membri del consiglio di amministrazione.

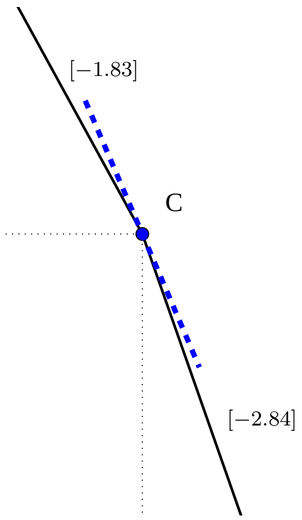
Consigliere A. La sua proposta equivale a scegliere la soluzione ottima secondo f_2. La soluzione è paretiana e la indichiamo con A in figura.



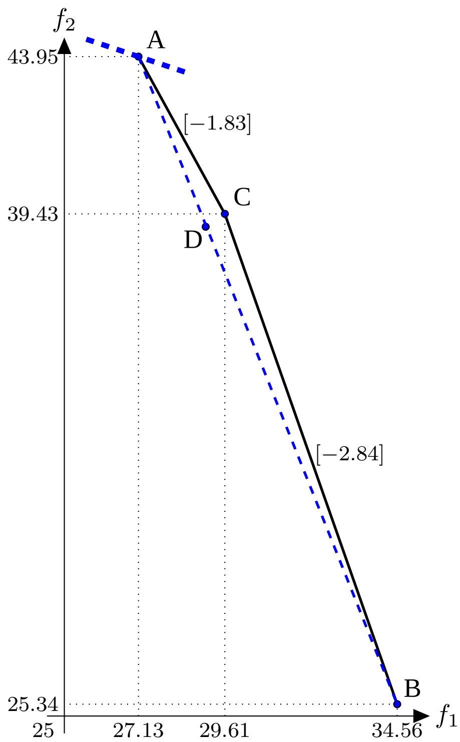
Consigliere B. La sua proposta equivale a scegliere la soluzione ottima secondo f_1. La soluzione è paretiana e la indichiamo con B in figura.



Consigliere C. Questi suggerisce di ottimizzare una funzione obiettivo pesata e fornisce anche il valore del peso. In questo caso il problema si riconduce ad un modello di PL con un solo obiettivo $f_C = 0.7f_1 + 0.3f_2$. Anziché risolvere da capo il modello di PL, avendo già eseguito l'analisi parametrica e sapendo che per qualunque combinazione convessa dei due obiettivi lineari l'ottimo che si ottiene corrisponde ad una soluzione paretiana, basta confrontare il nuovo obiettivo f_C con il coefficiente angolare dei segmenti che costituiscono la regione paretiana e che sono stati già ottenuti con l'analisi parametrica (indicati tra parentesi quadre in figura). Le curve di livello di f_C hanno coefficiente angolare $-\frac{7}{3} = -2.\overline{3}$, che è un valore compreso tra -1.83 e -2.84. Pertanto l'ottimo cade nel punto di discontinuità indicato con C nella figura.



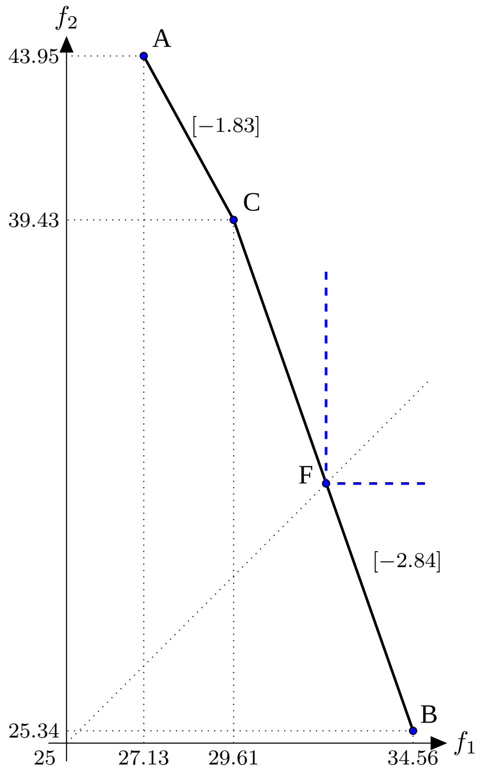
Consigliere D. Il consigliere D si sbaglia! Calcolando una combinazione convessa con coefficienti $0,25$ e $0,75$ delle due soluzioni indicate con A e B, si otterrebbe una soluzione che nello spazio degli obiettivi avrebbe coordinate $f_1 = 29$ e $f_2 = 39$ (indicata con D nella figura) che non è paretiana.



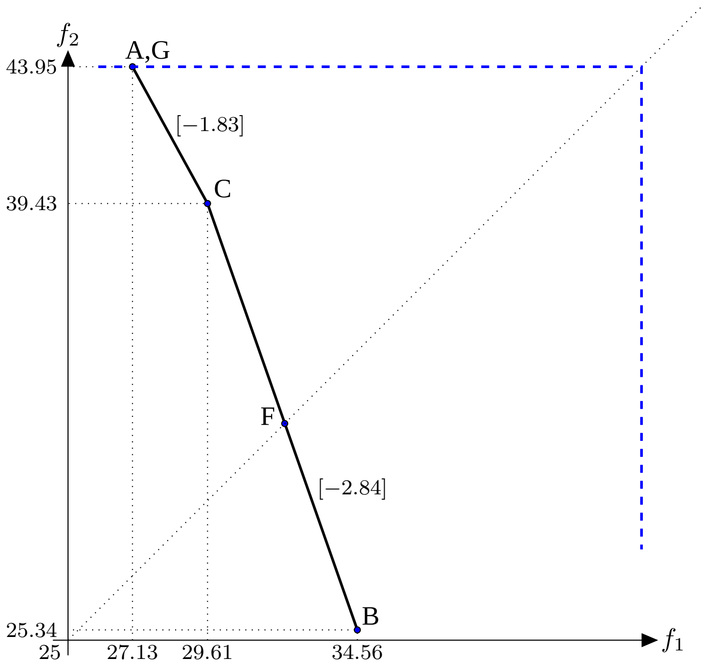
Con la pesatura indicata dal consigliere D si avrebbero curve di livello con coefficiente angolare $-1/3$ e la soluzione ottima sarebbe nel punto A (e non nel punto D).

Consigliere E. Anche il consigliere E si sbaglia. Il fatto che le strategie miste siano infinite non significa che sia necessario considerare infinite soluzioni. La regione paretiana è lineare a tratti e quindi può essere descritta con un numero finito di informazioni, costituito dalle coordinate dei punti di discontinuità (tre in questo esempio).

Consigliere F. Il consigliere F sta suggerendo inconsapevolmente di scegliere una soluzione utilizzando le curve di indifferenza di una funzione obiettivo max-min: la soluzione ottima in questo caso giace sulla bisettrice del primo quadrante nello spazio degli obiettivi, cioè sulla retta $f_1 = f_2 = 32.16$ (punto F in figura). Il suo dubbio su cosa augurarsi non ha senso, data la strategia che ha suggerito: infatti il risultato sarebbe lo stesso in entrambi gli scenari.



Consigliere G. Questi propone inconsapevolmente curve di livello max-max, che portano a scegliere la soluzione ottima secondo f_2 (punto G nella figura, coincidente con il punto A). Egli deve augurarsi che la nuova normativa venga approvata, poiché è solo in tal caso che si ottiene il valore massimo pari all'ottimo di $f_2 = 43.95$.



Consigliere H. Il consigliere H (probabilmente italiano) ignora l'esistenza della Ricerca Operativa.